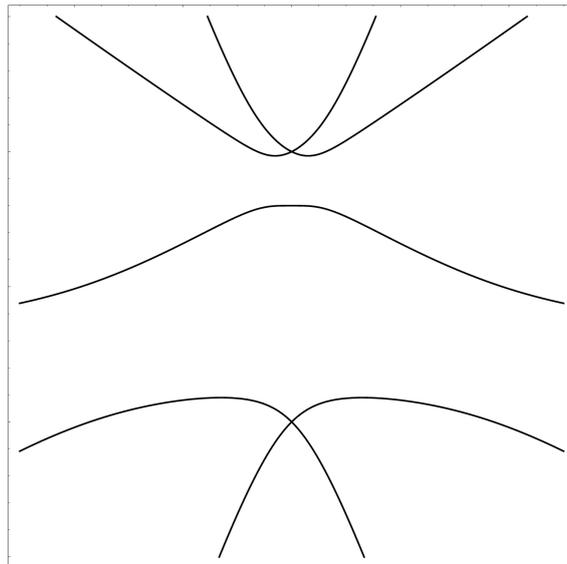


JOHANNES GUTENBERG-UNIVERSITÄT MAINZ  
FACHBEREICH 08

STUDIENGANG MATHEMATIK

MASTERARBEIT

# Die Riccati-Gleichung unter Störungen endlichen Ranges



von  
Julian P. Großmann

*Das Thema stellte*  
Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Mainz, den 17. Juli 2013

Am 4. November 2019 wurden kleine Berichtigungen vorgenommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung und Bezeichnungen</b>	<b>5</b>
<b>1. Maßtheorie</b>	<b>9</b>
1.1. Maß- und Integraldefinitionen . . . . .	9
1.2. Verallgemeinerte komplexe Maße . . . . .	12
1.3. Lebesgue-Stieltjes-Integral . . . . .	14
1.4. Hellys Theoreme . . . . .	17
1.5. Träger von Maßen . . . . .	20
1.6. Lebesguescher Zerlegungssatz . . . . .	21
1.7. Absolut stetige und singuläre Funktionen . . . . .	27
1.8. Differentiation von Radonmaßen . . . . .	28
1.9. Matrixwertige Stieltjes-Maße . . . . .	34
<b>2. Herglotzfunktionen</b>	<b>37</b>
2.1. Skalare Herglotzfunktionen . . . . .	37
2.2. Minimale Träger bei skalaren Herglotzfunktionen . . . . .	47
2.3. Matrixanalysis . . . . .	50
2.4. Matrixwertige Herglotzfunktionen . . . . .	51
2.5. Minimale Träger bei matrixwertigen Herglotzfunktionen . . . . .	55
<b>3. Spektraltheorie</b>	<b>59</b>
3.1. Grundlegende Bezeichnungen . . . . .	59
3.2. Multiplizitäten von Spektren . . . . .	64
3.3. Absolut stetige und singulär stetige Spektren . . . . .	72
3.4. Technische Hilfsmittel . . . . .	75
3.5. Aronszajn-Donoghue-Theorie . . . . .	77
<b>4. Riccati-Gleichung</b>	<b>81</b>
4.1. Unbeschränkte Operatoren . . . . .	81
4.2. Operator-Riccati-Gleichung . . . . .	84
4.3. Algebraische Riccati-Gleichung . . . . .	88
<b>5. Endlichdimensionale Störungen und Lösungen der Riccati-Gleichung</b>	<b>91</b>
5.1. Ziele und Ergebnisse . . . . .	92
5.2. Konstruktion einer Herglotzfunktion . . . . .	94
5.3. Implizite Lösung der Riccati-Gleichung . . . . .	101
5.4. Berechnung der Eigenwerte . . . . .	104
5.5. Der eindimensionale Fall . . . . .	108
5.5.1. Ein endlichdimensionales Beispiel . . . . .	111
5.5.2. Riccati-Gleichung im eindimensionalen Fall . . . . .	112
5.6. Der zweidimensionale Fall . . . . .	116
5.6.1. Störungen vom Rang Eins . . . . .	116

5.6.2.	Riccati-Gleichung im zweidimensionalen Fall . . . . .	122
5.6.3.	Beispiele und Folgerungen . . . . .	125
5.6.4.	Spezielle Störungen vom Rang Eins . . . . .	127
5.6.5.	Störungen vom Rang Zwei . . . . .	130
5.7.	Der endlichdimensionale Fall . . . . .	131
5.8.	Riccati-Gleichung im endlichdimensionalen Fall . . . . .	133
5.9.	Ausblick . . . . .	139
<b>A.</b>	<b>Anhang</b>	<b>141</b>
	<b>Literatur</b>	<b>145</b>

## Einführung und Bezeichnungen

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit einer speziellen Störung eines selbstadjungierten Operators in einem Hilbertraum durch einen Operator von endlichem Rang und der damit in Verbindung stehenden *Riccati-Gleichung*. Sowohl der Begriff der Störungstheorie als auch die Bezeichnung *Riccati-Gleichung* sind in der Mathematik ein vielfältiges Themengeflecht mit Relevanz in verschiedenen Gebieten. Aus diesem Grund ist es wichtig, den genauen Rahmen der hier behandelten Problemstellung vorzustellen.

Die Störungstheorie, wie sie hier verstanden wird, befasst sich mit linearen selbstadjungierten Operatoren zwischen Hilberträumen. In unserer Problemstellung betrachten wir einen selbstadjungierten Operator  $\mathbf{A}$  in einem möglicherweise unendlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$ , welcher orthogonal in zwei abgeschlossene Unterräume  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  zerlegt sei, welche zudem unter dem Operator invariant sind. Der Operator  $\mathbf{A}$  wird nun bezüglich dieser Zerlegung durch einen selbstadjungierten Operator  $\mathbf{V}$  auf folgende Weise gestört:

$$\mathbf{B} := \mathbf{A} + \mathbf{V} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & V \\ V^* & 0 \end{pmatrix} .$$

Der selbstadjungierte Operator  $\mathbf{B}$  steht in dieser Blockdarstellung in direktem Zusammenhang zur der Gleichung

$$A_1 X - X A_0 - X V X + V^* = 0 .$$

Diese wird als *Operator-Riccati-Gleichung* oder oft auch als *algebraische Riccati-Gleichung* bezeichnet. Die Koeffizienten der Gleichung sind demnach lineare Operatoren auf den Hilberträumen  $\mathfrak{H}_0$  und  $\mathfrak{H}_1$ . Gesucht ist ein linearer Operator  $X : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1$ , der die Gleichung erfüllt. Sind alle auftretenden Operatoren beschränkt, so ist die Riccati-Gleichung als Operatoridentität zu lesen. In allen anderen Fällen, vor allem in dem wichtigen Fall, wenn die Lösung  $X$  unbeschränkt ist, ist die Einbeziehung von Definitionsbereichen in die Interpretation der obigen Gleichung sehr wichtig.

Ausgehend von den Autoren V. Kozlov und K. A. Makarov, die in ihrer Veröffentlichung [KM05] einen Hilbertraum als eindimensional angenommen haben, verallgemeinert diese Masterarbeit die Ergebnisse für den Fall, dass ein Hilbertraum beliebige endliche Dimension besitzt. Es werden Eigenschaften des Spektrums des gestörten Operators  $\mathbf{B}$  bewiesen sowie die Existenz und Form von Lösungen der Riccati-Gleichung betrachtet. Insbesondere zeigen wir Existenzsätze für Lösungen, wenn der komplette Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  endlichdimensional ist.

Für das Herangehen an die obige Problemstellung geben wir außerdem einen detaillierten Überblick über weitere Themen und Zusammenhänge, die auch für andere Gebiete der Mathematik von Relevanz sind. So wenden wir uns wichtigen Aspekten der Maßtheorie zu, untersuchen sogenannte Herglotzfunktionen und befassen uns mit verschiedenen Spektralanteilen eines selbstadjungierten Operators.

Kapitel 1 ist der Maßtheorie gewidmet und beschäftigt sich hauptsächlich mit Aspekten, die in der Literatur des Öfteren vernachlässigt werden. Dazu gehören die für uns wichtigen komplexen Maße und deren Verallgemeinerung auf operatorwertige Maße, das Lebesgue-Stieltjes-Integral und der bekannte Lebesguesche Zerlegungssatz.

In Kapitel 2 werden Herglotzfunktionen eingeführt und untersucht. Diese sind holomorphe Funktionen, welche die obere komplexe Halbebene auf sich selbst abbilden. Einen besonderen Stellenwert nimmt die Verallgemeinerung auf matrixwertige Herglotzfunktionen ein und insbesondere in der Störungstheorie von selbstadjungierten Operatoren ist sie ein unverzichtbares Werkzeug.

Mit Kapitel 3 werden die Grundlagen der Spektraltheorie für selbstadjungierte Operatoren in Hilberträumen erarbeitet und bekannte Aussagen wie das Funktionalkalkül und der Spektralsatz mit Hilfe der vorherigen Kapitel bewiesen. Wir werden auch auf die Multiplizitäten von Spektren eingehen und definieren die Zerlegung in singuläres und absolut stetiges Spektrum. Weiterhin werden wir mit der Aronszajn-Donoghue-Theorie Beispiele der Störungstheorie behandeln.

Kapitel 4 wird sich mit der oben definierten Riccati-Gleichung befassen und bereitet die Erweiterung des eindimensionalen Falles auf den endlichdimensionalen Fall vor, indem Sprechweisen und Definitionen eingeführt und erläutert werden. Es wird unter anderem der Zusammenhang zwischen invarianten Unterräumen des Operators  $\mathbf{B}$  und der zugeordneten Riccati-Gleichung bewiesen.

Schließlich widmen wir uns in Kapitel 5 dem oben bereits beschriebenen Problem, d. h. wir fassen den Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  als endlichdimensional auf, während der andere Hilbertraum sowohl endlichdimensional als auch unendlichdimensional sein kann. Wir werden das Spektrum des gestörten Operators  $\mathbf{B}$  charakterisieren und insbesondere auf die Eigenwerte und das singulär stetige Spektrum eingehen. Mit Hilfe der Beschreibung des Spektrums von  $\mathbf{B}$  werden Lösungen der Riccati-Gleichung konstruiert.

Als besonderes Ergebnis beweisen wir, dass die Riccati-Gleichung für einen endlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  mindestens eine beschränkte Lösung besitzt, wenn die Spektren der Operatoren  $A_0$  und  $\mathbf{B}$  disjunkt sind.

Die folgende Liste soll einen Überblick über Notationen schaffen, welche durchgängig in der Arbeit verwendet werden.

### Symbole

$:=$	gleich per definitionem
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen mit Null
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\pi$	Kreiszahl Pi
$\text{Im}$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\text{Re}$	Realteil einer komplexen Zahl
$\mathfrak{B}(M)$	Borelsche Sigma-Algebra auf dem topologischen Raum $M$
$L^p(M, \mu)$	Lebesgue-Raum der $p$ -fach $\mu$ -integrierbaren Funktionen

$\chi_A$	charakteristische Funktion zu der Menge $A$
$B_r(x)$	abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r$
$U_r(x)$	offene Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r$
$\mathfrak{H}$	ein Hilbertraum (meistens komplex und separabel)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt in $\mathfrak{H}$ , linear im zweiten Argument
$(\cdot   \cdot)$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ , linear im zweiten Argument
$\lambda, dx$	Lebesguemaß auf der Borelschen Sigma-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$
$Z^c$	Komplement einer Teilmenge $Z \subseteq X$
$\mathbb{C}_+$	offene obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$
$\mathbb{C}_-$	offene untere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$
$\mu$ -f. ü.	<i>fast überall</i> bezüglich des Maßes $\mu$
f. ü.	<i>fast überall</i> bezüglich des Lebesguemaßes
$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$	Vektorraum der stetigen und linearen Abbildungen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{H}$
$E_A$	Spektralmaß für Operator $A$
$\text{lin span } U$	lineare Hülle einer Teilmenge $U$ in einem Vektorraum
$f _U$	Einschränkung einer Abbildung $f$ auf eine Teilmenge $U$
$\oplus$	orthogonale direkte Summe in Hilberträumen
$I_{\mathfrak{H}}$	Identitätsabbildung $I_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$
$\sigma(A)$	Spektrum eines Operators $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$
$\sigma_p(A)$	Punktspektrum eines Operators $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$
$\sigma_c(A)$	stetiges Spektrum eines Operators $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$
$\rho(A)$	Resolventenmenge eines Operators $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$
Kern $A$	Nullstellenmenge eines linearen Operators $A$
Bild $A$	Bildbereich eines linearen Operators $A$



# 1. Maßtheorie

Die Maß- und Integrationstheorie bilden das Fundament dieser Arbeit. In jedem Kapitel werden wir uns mit bestimmten Maßen und deren Eigenschaften beschäftigen und letztendlich die Störungstheorie von selbstadjungierten Operatoren mit geeigneten Maßen formulieren und behandeln.

Wir werden hier zwar die wichtigsten Begriffe der Maßtheorie wiederholen, die üblichen Grundlagen insbesondere die Integrationstheorie mit ihren Konvergenzsätzen als bekannt voraussetzen. Dieses Kapitel dient hauptsächlich dazu, Begriffe einzuführen, die in der gewöhnlichen Maßtheorie nur eine Randrolle einnehmen, allerdings in dieser Arbeit sehr wichtig sind. Darunter verstehen wir vordergründig komplexe Maße und sogenannte Stieltjes-Maße und -Integrale. Ebenfalls benötigen wir im weiteren Verlauf die *Sätze von Helly* und den Lebesgueschen Zerlegungssatz und werden diese aufgrund dessen hier beweisen. In diesem Kapitel werden vor allem [Els99], [KFS75], [Rud70], [Rud09] und [Sch05] benutzt und häufig zitiert.

## 1.1. Maß- und Integraldefinitionen

Die Aufgabe dieses Abschnittes ist es, verschiedene Sprechweisen über Maße und deren Verallgemeinerungen zu klären.

Wir festigen zuerst die üblichen Begriffe. Unter einer *Sigma-Algebra* einer Menge  $M$  verstehen wir eine Familie von Teilmengen, welche  $M$  enthält und abgeschlossen unter Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen ist. Die Elemente einer Sigma-Algebra heißen *messbare Mengen*. Die Menge  $M$  zusammen mit einer Sigma-Algebra nennen wir einen *messbaren Raum*. Abbildungen zwischen zwei messbaren Räumen heißen *messbar*, wenn Urbilder messbarer Mengen wieder messbare Mengen sind.

In der üblichen Maß- und Integrationstheorie definiert man ein Maß auf einer Sigma-Algebra als eine abzählbar additive Funktion, man spricht von *Sigma-Additivität*, mit Werten in den positiven reellen Zahlen, wobei Null und Unendlich eingeschlossen werden.

Man kann sich nun leicht fragen, warum man keine negativen Werte oder sogar komplexe Zahlen zulassen sollte. In der Tat wird die Theorie nicht wesentlich komplizierter. Wir werden demnach ein *Maß* immer als eine Abbildung von einer Sigma-Algebra in die komplexen Zahlen mit dem erweiterten Symbol  $\infty$  bzw. in die erweiterte Zahlengerade  $[-\infty, \infty]$  auffassen. Die genauen Definitionen und Sprechweisen listen wir nun auf.

**Definition 1.1** (Komplexe und signierte Maße). Es sei  $\mathcal{A}$  eine Sigma-Algebra auf einer Menge  $M$  und  $\mu$  eine Funktion auf  $\mathcal{A}$  mit Werten in  $\mathbb{C}$  oder in  $[-\infty, \infty]$  mit folgenden Eigenschaften:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

(b)  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  für alle  $A_i \in \mathcal{A}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Hier ist zu beachten, dass wir die absolute Konvergenz bzw. die uneigentliche Konvergenz gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  der letztgenannten Reihe verlangen, damit der Wert unabhängig von der Summierungsreihenfolge ist. Nun gibt es je nach Wertebereich verschiedene Namen für die Abbildungen.

- (1) Falls  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , so handelt es sich um ein Maß im üblichen Sinne. Wir nennen es zur besseren Unterscheidung ein *positives Maß auf  $\mathcal{A}$* .
- (2) Falls  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$  oder  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty)$ , so nennen wir die Abbildung ein *signiertes Maß auf  $\mathcal{A}$* .
- (3) Gilt  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , so sprechen wir von einem *komplexen Maß auf  $\mathcal{A}$* .

Nach obengenannten Definitionen ist sichergestellt, dass Ausdrücke wie  $\infty - \infty$  nicht auftreten können. Jegliche Summen und Reihen sind somit wohldefiniert. Zu betonen ist, dass ein komplexes Maß immer endlich ist, d. h.  $|\mu(M)| < \infty$ . Wie man diese Einschränkung auf sinnvolle Weise fallen lassen kann, werden wir später besprechen.

**Definition 1.2** (Operatorwertige Maße). Es sei  $\mathcal{A}$  eine Sigma-Algebra auf einer Menge  $M$  und  $\mathfrak{H}$  ein komplexer oder reeller Hilbertraum. Mit  $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$  bezeichnen wir den Vektorraum der stetigen und linearen Abbildungen von  $\mathfrak{H}$  nach  $\mathfrak{H}$ . Eine Abbildung  $\Omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  heißt ein *operatorwertiges Maß*, falls

$$\Omega_{y,x} := \langle y, \Omega(\cdot)x \rangle : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (1.1)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  ein komplexes Maß ist. Ist die Dimension des Hilbertraumes endlich, so spricht man auch oft von einem *matrixwertigen Maß*.

Wir werden im weiteren Verlauf sehen, dass man viele Fragestellungen bezüglich komplexer bzw. signierter Maße auf die bekannte Theorie der positiven Maße zurückführen kann. Jedes komplexe Maß kann nämlich in geeigneter Weise in positive Maße zerlegt werden, sodass auch die bekannte Integrationstheorie direkt übernommen werden kann.

Das folgende Theorem wird in der Literatur oft in zwei Theoreme unterteilt, nämlich in den *Hahnsche Zerlegungssatz* und den *Jordanschen Zerlegungssatz*, und besagt, dass man jedes komplexe Maß als Linearkombination von gewöhnlichen positiven Maßen schreiben kann. Wir erinnern daran, dass ein positives Maß  $\nu$  auf einer Menge  $M$  *absolut stetig* bezüglich eines positiven Maßes  $\mu$  heißt, wenn jede  $\mu$ -Nullmenge auch eine  $\nu$ -Nullmenge ist. Man schreibt üblicherweise  $\nu \ll \mu$ . Dagegen heißen die beiden Maße *singulär zueinander*, wenn es eine messbare Menge  $A$  mit der Eigenschaft gibt, dass sowohl  $\nu(M \setminus A) = 0$  als auch  $\mu(A) = 0$  gilt. Man schreibt dann  $\nu \perp \mu$ . Wir werden später noch genauer auf diese Definitionen eingehen.

**Theorem 1.3** (Hahn-Jordan-Zerlegung). *Es sei  $\mathcal{A}$  eine Sigma-Algebra auf einer Menge  $M$  und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein komplexes Maß auf  $\mathcal{A}$ . Dann existieren eindeutig bestimmte endliche positive Maße, hier bezeichnet mit  $\mu_{\Re}^+$ ,  $\mu_{\Re}^-$ ,  $\mu_{\Im}^+$  und  $\mu_{\Im}^-$ , die*

$$\mu = \mu_{\Re}^+ - \mu_{\Re}^- + i\mu_{\Im}^+ - i\mu_{\Im}^- \quad (1.2)$$

sowie  $\mu_{\Re}^+ \perp \mu_{\Re}^-$  und  $\mu_{\Im}^+ \perp \mu_{\Im}^-$  erfüllen.

Auf den Beweis dieser wichtigen Aussage werden wir im Abschnitt 1.6 zurückkommen und nun zuerst Anwendungen der Hahn-Jordan-Zerlegung präsentieren. Wir zeigen, wie sich der Integrationsbegriff auf komplexe und operatorwertige Maße ausdehnen lässt. Die reellen bzw. komplexen Zahlen sind dabei immer mit der üblichen Borelschen Sigma-Algebra  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  bzw.  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$  ausgestattet.

**Definition 1.4.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  ein komplexes Maß mit der Hahn-Jordan-Zerlegung  $\mu = \mu_{\Re}^+ - \mu_{\Re}^- + i\mu_{\Im}^+ - i\mu_{\Im}^-$ . Für eine reelle messbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man das *Lebesgue-Integral von  $f$  bezüglich des komplexen Maßes  $\mu$*  durch

$$\int f d\mu := \int f d\mu_{\Re}^+ - \int f d\mu_{\Re}^- + i \int f d\mu_{\Im}^+ - i \int f d\mu_{\Im}^-, \quad (1.3)$$

falls die rechte Seite wohldefiniert ist, d. h. keine Ausdrücke der Form  $\infty - \infty$  auftreten. Für eine komplexwertige Funktion  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  wird das Integral bezüglich  $\mu$  wie üblich durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil festgelegt:

$$\int g d\mu := \int \operatorname{Re}(g) d\mu + i \int \operatorname{Im}(g) d\mu. \quad (1.4)$$

Für das komplexe Maß  $\mu$  definieren wir den Vektorraum der  $\mu$ -integrierbaren Funktionen:

$$\mathfrak{L}^1(M, \mu) := \left\{ f : M \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \int |f| d\mu_r^\sigma < \infty \right. \\ \left. \text{für alle } \sigma \in \{-, +\}, r \in \{\Re, \Im\} \right\}.$$

Auf diesem ist die Halbnorm

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(M, \mu)} := \sum_{\sigma, r} \int |f| d\mu_r^\sigma$$

gegeben, sodass man wie auch für positive Maße den Faktorraum

$$L^1(M, \mu) := \mathfrak{L}^1(M, \mu) / \left\{ f \in \mathfrak{L}^1(M, \mu) \mid \|f\|_{\mathfrak{L}^1(M, \mu)} = 0 \right\}, \quad (1.5)$$

definieren kann, der ein wohldefinierter normierter Raum mit der Norm

$$\|f\|_{L^1(M, \mu)} := \sum_{\sigma, r} \int |f| d\mu_r^\sigma$$

ist.

Die obige Definition stellt eine von mehreren Möglichkeiten dar, die Integration bezüglich eines komplexen Maßes zu erklären. Auch für operatorwertige Maße stehen verschiedene Wege, den Integralbegriff einzuführen, zur Verfügung. Ein möglicher Weg führt auch hier über Elementarfunktionen, sodass man die Theorie wie für positive Maße konstruiert. Natürlicher und einfacher erscheint es, die Hahn-Jordan-Zerlegung zu benutzen und die obige Integraldefinition weiter auszudehnen:

**Definition 1.5.** Es sei  $(M, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $\mathfrak{H}$  ein komplexer oder reeller Hilbertraum und  $\Omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein operatorwertiges Maß. Eine komplexe messbare Funktion  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $\Omega$ -integrierbar, wenn eine Konstante  $C > 0$  so gewählt werden kann, dass

$$\left| \int g(t) d\langle y, \Omega(t)x \rangle \right| \leq C \|x\| \|y\| \quad (1.6)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  gilt.

Für eine  $\Omega$ -integrierbare Funktion  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir das *Integral von  $g$  bezüglich  $\Omega$*

$$\int_M g(t) d\Omega(t) := T \quad (1.7)$$

als den eindeutig bestimmten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ , der

$$\langle y, Tx \rangle = \int_M g(t) d\langle y, \Omega(t)x \rangle \quad (1.8)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  erfüllt.

Zum Verständnis der Definition beachte man, dass  $(y, x) \mapsto \int_M g(t) d\langle y, \Omega(t)x \rangle$  eine beschränkte Sesquilinearform definiert und nach Satz A.1 der Operator  $T$  existiert und eindeutig bestimmt ist.

**Bemerkung 1.6.** Ein positives Maß ist bekanntlich  $\emptyset$ -stetig, d. h. für eine absteigende Folge von messbaren Mengen  $(A_n)$  mit endlichem Maß und  $\bigcap A_n = \emptyset$  gilt  $\mu(A_n) \rightarrow 0$ . Demnach gilt dies auch für komplexe und operatorwertige Maße.

## 1.2. Verallgemeinerte komplexe Maße

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt sind komplexe Maße per definitionem endlich. Dies ist eine Einschränkung, die man nicht immer erfüllen möchte. Schon bei positiven Maßen beschäftigt man sich sehr oft mit  $\sigma$ -endlichen Maßen, welche viele Eigenschaften von endlichen Maßen behalten.

Die folgenden Definitionen sind in der Literatur nicht üblich, aber erscheinen durchaus sinnvoll.

**Definition 1.7.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $\mathfrak{B}(M)$  die Borelsche Sigma-Algebra auf  $M$ . Eine Mengenfunktion  $\mu : \mathfrak{B}(M) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt ein *verallgemeinertes komplexes Maß*, wenn für alle beschränkten Borelmengen  $K \subseteq M$  die Abbildung

$$\mu_K := \mu|_{\mathfrak{B}(K)} : \mathfrak{B}(K) \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.9)$$

ein komplexes Maß ist und zusätzlich

$$|\mu(B)| = \sup \left\{ |\mu_K(B \cap K)| \mid K \subseteq M \text{ beschränkt} \right\} \quad (1.10)$$

für alle unbeschränkten Borelmengen  $B \subseteq M$  gilt.

Das Wesentliche hier ist nicht das zusätzliche Symbol  $\infty$ , sondern dass wir die Maßeigenschaften nur noch auf beschränkten Mengen verlangen, was z. B. für eine sinnvolle Integraldefinition völlig ausreicht.

Die komplexen Maße  $\mu_K$  können wie üblich mit der Hahn-Jordan-Zerlegung in positive endliche Maße zerlegt werden:

$$\mu_K = \mu_{K,\Re}^+ - \mu_{K,\Re}^- + i\mu_{K,\Im}^+ - i\mu_{K,\Im}^- . \quad (1.11)$$

Mit Hilfe dieser Zerlegung lässt sich nun auch für die verallgemeinerten komplexe Maße ein sinnvoller Integralbegriff einführen.

**Definition 1.8.** Es sei  $\mu$  ein verallgemeinertes komplexes Maß auf dem metrischen Raum  $(M, d)$  mit obiger Zerlegung (1.11) und  $f : M \rightarrow [0, \infty)$  eine nichtnegative messbare Funktion. Sind für alle  $\sigma \in \{-, +\}$  und  $r \in \{\Re, \Im\}$  die Ausdrücke

$$I_r^\sigma := \sup \left\{ \int_K f d\mu_{K,r}^\sigma \mid K \in \mathfrak{B}(M) \text{ beschränkt} \right\} \quad (1.12)$$

endlich, so heißt die Funktion  $\mu$ -integrierbar. Man definiert in diesem Fall das *Integral von  $f$  bezüglich  $\mu$*  als:

$$\int_M f d\mu := I_{\Re}^+ - I_{\Re}^- + i I_{\Im}^+ - i I_{\Im}^- . \quad (1.13)$$

Für reelle und komplexe Funktionen definiert man  $\mu$ -Integrierbarkeit und das Integral mit der üblichen Zerlegung in positiven und negativen Anteil bzw. Realteil und Imaginärteil.

An den Bezeichnungen und Definitionen ist klar zu erkennen, dass hier der Begriff des komplexen Maßes zumindest für die Borelsche Sigma-Algebra auf metrischen Räumen verallgemeinert wird. Wir werden in dieser Arbeit verallgemeinerte komplexe Maße sogar nur auf  $\mathbb{R}^n$  verwenden.

**Beispiel 1.9.** Es sei  $\lambda$  das Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}$  und  $\delta_{\{0\}}$  das Punktmaß in der Null. Die Mengenfunktion  $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} (\lambda + i \delta_{\{0\}})(A) & , \text{ falls } \lambda(A) < \infty \\ \infty & , \text{ falls } \lambda(A) = \infty \end{cases} \quad (1.14)$$

ist offensichtlich kein komplexes Maß. Man beachte auch den Verlust der Sigma-Additivität, wenn der Wert  $\infty$  angenommen wird. Nach unserer Definition ist  $\mu$  jedoch ein verallgemeinertes komplexes Maß und wir können folgendes Integral berechnen:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d\lambda(x) + i = \pi + i . \quad (1.15)$$

Ebenso wie wir vorhin operatorwertige Maße durch Rückführung auf komplexe Maße eingeführt haben, kann man nun wie folgt vorgehen, um auch dort auf die Forderung der Endlichkeit zu verzichten.

**Definition 1.10.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $\mathfrak{H}$  ein komplexer oder reeller Hilbertraum. Eine Abbildung  $\Omega : \mathfrak{B}(M) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \cup \{\infty\}$  heißt ein *verallgemeinertes operatorwertiges Maß*, falls

$$\Omega_{y,x} := \langle y, \Omega(\cdot)x \rangle : \mathfrak{B}(M) \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad (1.16)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  ein verallgemeinertes komplexes Maß ist. Dabei ist das Symbol  $\langle y, \infty x \rangle$  folgendermaßen definiert:

$$\langle y, \infty x \rangle := \sup \left\{ |\langle y, \Omega(K)x \rangle| \mid K \subseteq M \text{ beschränkt} \right\}. \quad (1.17)$$

Es sei nun  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe messbare Funktion und für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  bezüglich  $\Omega_{y,x}$  integrierbar. Weiterhin existiere eine Konstante  $C > 0$  mit

$$\left| \int g(t) d\langle y, \Omega(t)x \rangle \right| \leq C \|x\| \|y\| \quad (1.18)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ . Dann verstehen wir das *Integral von  $g$  bezüglich  $\Omega$*

$$\int_M g(t) d\Omega(t) =: T \quad (1.19)$$

als den eindeutig bestimmten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ , der

$$\langle y, Tx \rangle = \int_M g(t) d\langle y, \Omega(t)x \rangle \quad (1.20)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  erfüllt.

Mit der obigen Definition haben wir auch den Begriff des operatorwertigen Maßes auf der Borelschen Sigma-Algebra ausgedehnt und die Endlichkeitsforderung des Maßes fallen gelassen. Man kann dies als eine Art  $\sigma$ -Endlichkeit identifizieren, sodass wir diesen Begriff nun etwas weiter fassen möchten.

**Definition 1.11.** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu$  ein Maß, welches positiv, signiert, komplex oder operatorwertig ist. Wenn  $X$  ein metrischer Raum ist, so darf das Maß auch verallgemeinert komplex oder verallgemeinert operatorwertig sein. Wir nennen  $\mu$  ein  *$\sigma$ -endliches Maß*, wenn es eine Folge  $(A_n)$  von abzählbar vielen messbaren Teilmengen derart gibt, dass  $X = \bigcup_n A_n$  und  $\mu(A_n) \neq \pm\infty$  für alle  $n$  gilt.

Dies bedeutet, dass verallgemeinerte komplexe Maße oder verallgemeinerte operatorwertige Maße auf der Borelschen-Sigma-Algebra  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  immer  $\sigma$ -endlich sind.

### 1.3. Lebesgue-Stieltjes-Integral

In dieser Arbeit spielen sogenannte Stieltjes-Maße und -Integrale eine wichtige Rolle. Da diese in vielen Lehrbüchern zur Maßtheorie nur am Rande erwähnt werden, führen wir diese nun ohne Umwege ein und klären die gängigen Bezeichnungen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns erst noch auf positive Maße. Sprechen wir von einem *Borelmaß*, so meinen wir ein Maß auf einem topologischen Raum, definiert auf der Borelschen Sigma-Algebra. Weiterhin nennen wir eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *monoton wachsend*, wenn  $f(x) \leq f(y)$  für alle  $x \leq y$  gilt.

**Definition 1.12.** Für eine monoton wachsende Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory (vgl. Satz A.7) genau ein positives Borelmaß  $\mu_F$  mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned}\mu_F((a, b)) &= F(b^-) - F(a^+), \\ \mu_F([a, b)) &= F(b^-) - F(a^-), \\ \mu_F((a, b]) &= F(b^+) - F(a^+), \\ \mu_F([a, b]) &= F(b^+) - F(a^-),\end{aligned}$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ . Der Fall des leeren Intervalls ist dabei ausgenommen, da selbstverständlich  $\mu_F(\emptyset) = 0$  gelten soll. Hier bezeichnen wir die rechtsseitigen bzw. die linksseitigen Grenzwerte mit

$$F(a^+) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(a + \varepsilon) \text{ bzw. } F(a^-) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(a - \varepsilon). \quad (1.21)$$

Dieses Borelmaß  $\mu_F$  nennen wir das *Lebesgue-Stieltjes-Maß* zu  $F$  oder kurz ein *Stieltjes-Maß*.

Es sei hier noch erwähnt, dass für eine gewisse Klasse von Borelmaßen, sogenannte Radonmaße (siehe Definition 1.36), auch die Umkehrung gilt, d. h. man kann zu einem beliebigen Radonmaß  $\nu$  eine monoton wachsende Funktion  $F$  so wählen, dass  $\nu = \mu_F$  im obigen Sinne gilt. Diese Funktion ist allerdings im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Wie man an der Definition des Maßes  $\mu_F$  erkennt, ist der Funktionswert von  $F$  an Unstetigkeitsstellen irrelevant. Um eine eindeutige Funktion  $F$  zu erreichen, muss man diese Werte demnach festlegen. Am häufigsten verlangt man die Rechtsstetigkeit und spricht dann z. B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie von der Verteilungsfunktion des Maßes  $\mu$ . Wir werden hingegen später eine andere und für unsere Zwecke treffendere Festlegung wählen.

Man muss hier betonen, dass man mit der Bezeichnung *Lebesgue-Stieltjes-Maß* keinen neuen Maßbegriff einführt, sondern nur auf eine bestimmte Konstruktionsweise des Maßes hinweisen möchte.

Für die Integration bezüglich eines Stieltjes-Maßes gibt es spezielle Notationen, die wir kurz erklären möchten:

**Definition 1.13.** Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende Funktion und  $\mu_F$  das zugehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß. Für eine  $\mu_F$ -integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und reelle Zahlen  $a < b$  definieren wir das *Lebesgue-Stieltjes-Integral*:

$$\int_a^b f(x) dF(x) := \int_{[a,b]} f d\mu_F. \quad (1.22)$$

Für allgemeine Integrationsbereiche gibt es verschiedene Bezeichnungen wie z. B.

$$\int_{(a,b)} f(x) dF(x) \equiv \int_{a^+}^{b^-} f(x) dF(x) := \int_{(a,b)} f d\mu_F. \quad (1.23)$$

Diese spezielle Bezeichnungen erweisen sich unter anderem durch folgenden Satz als sehr sinnvoll.

**Satz 1.14.** *Ist die zu integrierende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so stimmen Lebesgue-Stieltjes-Integral und das klassische Riemann-Stieltjes-Integral überein, d. h.*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF(x) &= \sup_Z \sum_{i=0}^{N_Z-1} \sup \{ f(\xi) \mid \xi \in [x_i, x_{i+1}] \} \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= \inf_Z \sum_{i=0}^{N_Z-1} \inf \{ f(\xi) \mid \xi \in [x_i, x_{i+1}] \} \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i)) , \end{aligned}$$

wobei sich das genannte Supremum und Infimum über alle endliche Zerlegungen  $Z = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_Z} = b)$  des Intervalls  $[a, b]$  erstreckt.

Auf einen Beweis werden wir verzichten, da wir die Aussage im weiteren Verlauf nicht benötigen werden. Man findet einen Beweis in [KFS75, Chapter 10].

Auch die nächsten zwei Aussagen zeigen, warum es sinnvoll ist, dem Lebesgue-Stieltjes-Integral eine eigene Bezeichnung zu geben.

**Proposition 1.15.** *Ist  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) F'(x) dx \quad (1.24)$$

für jede messbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei steht  $dx$  für das Lebesguemaß auf der Borelschen Sigma-Algebra.

*Beweis.* Für ein beliebiges Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int \chi_I dF = \mu_F(I) = \int \chi_I(x) F'(x) dx . \quad (1.25)$$

Da aber auch  $A \mapsto \int_A F'(x) dx$  ein Borelmaß definiert, ist die Gleichung (1.25) nach der Eindeutigkeitsaussage des Fortsetzungssatzes von Carathéodory ebenfalls für jede beliebige Borelmenge  $I \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  erfüllt.

Mit der Linearität des Integrals gilt (1.24) sofort für Elementarfunktionen  $f$ . Mit den üblichen Approximationsargumenten und dem Satz von der monotonen Konvergenz ist die Aussage auch für jede messbare Funktion richtig.  $\square$

**Theorem 1.16** (Substitutionsformel). *Es seien  $X$  und  $Y$  messbare Räume,  $\mu$  ein positives Maß auf  $X$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine messbare Abbildung. Dann ist das Bildmaß  $f_*\mu := \mu \circ f^{-1}$  ein Maß auf  $Y$  und jede messbare Abbildung  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann  $f_*\mu$ -integrierbar, wenn  $g \circ f$   $\mu$ -integrierbar ist. Darüber hinaus gilt*

$$\int_Y g d(f_*\mu) = \int_X g \circ f d\mu . \quad (1.26)$$

*Beweis.* Wir beweisen nur die Formel (1.26). Für eine messbare Menge  $A \subseteq Y$  erfüllt die charakteristische Funktion  $g = \chi_A$  die Formel

$$\int_Y \chi_A d(f_*\mu) = \mu(f^{-1}(A)) = \int_{f^{-1}(A)} d\mu = \int_X \chi_A \circ f d\mu .$$

Durch die Linearität des Integrals gilt die Aussage somit für beliebige Elementarfunktionen und damit auch für jede messbare Funktion  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

Mehr über und um die Substitutionsregel des Lebesgue-Stieltjes-Integrals findet sich in dem Artikel von N. Falkner und G. Teschl [FT12].

### 1.4. Hellys Theoreme

Das folgende Theorem ist in der Literatur häufig als *Helly's selection theorem* bekannt und findet vor allem in der Maßtheorie und Stochastik seine Anwendung. Benannt ist es nach dem österreichischen Mathematiker *Eduard Helly*, welcher ebenfalls in Verbindung mit dem Beweis des Satzes von Hahn-Banach bekannt ist. Da wir Hellys Theorem als Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 2.2 im nächsten Kapitel benötigen, beweisen wir es hier ausführlich.

**Theorem 1.17** (Hellys Auswahltheorem). *Es seien  $I, K \subseteq \mathbb{R}$  kompakte Intervalle und für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  sei  $F_n : I \rightarrow K$  eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion. Dann existiert eine ebenfalls monoton wachsende und rechtsstetige Funktion  $F : I \rightarrow K$  und eine Teilfolge  $(n_k)_k$  derart, dass*

$$F_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(x) \quad (1.27)$$

für alle Stetigkeitsstellen  $x \in I$  von  $F$ .

*Beweis.* Die wesentlichen Ideen des Beweises gehen auf *Helly* zurück. Wir orientieren uns hier an den Darstellungen aus [KFS75, Chapter 10] und [Kle06]. Für jedes  $a \in A := \mathbb{Q} \cap I$  definieren wir eine Folge  $(F_n(a))_n$ . Da  $A$  abzählbar ist, können wir das Cantorsche Diagonalverfahren, siehe Lemma A.4, anwenden und erhalten eine Folge  $(k_\nu)_\nu$  mit  $k_{\nu+1} > k_\nu$ , sodass

$$f(a) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_{k_\nu}(a)$$

für alle  $a \in A$  existiert. Man erkennt leicht, dass  $f$  auf  $A$  monoton wachsend ist. Wir definieren nun

$$F(x) := \inf \{ f(a) \mid a \in A, a > x \}$$

und zeigen, dass  $F$  sowohl monoton wachsend als auch rechtsstetig ist. Es seien dafür  $x < y$  beliebig aus  $I$  gewählt. Aufgrund der Dichtheit der rationalen Zahlen existieren nun  $a_1, b_1 \in A$  derart, dass  $x < a_1 < b_1 < y$  gilt. Da offensichtlich  $F(a_1) \leq F(b_1)$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= \inf \{ f(a) \mid a \in A, a > x \} \leq F(a_1) \leq F(b_1) \leq \\ &\leq \inf \{ f(b) \mid b \in A, b > y \} = F(y), \end{aligned}$$

was die Monotonie zeigt. Die Rechtsstetigkeit folgt sofort aus dieser, denn für eine monoton fallende Folge  $(x_k) \subseteq I$  mit Grenzwert  $x \in I$  gilt aufgrund der Monotonie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = \inf_{k \in \mathbb{N}} F(x_k) = \inf \{ f(a) \mid a > x_n, n \in \mathbb{N} \} = F(x).$$

Es bleibt somit nur noch die Konvergenzaussage für Stetigkeitsstellen zu zeigen. Für dieses  $\varepsilon$ -Argument verweisen wir auf [KFS75, Chapter 10].  $\square$

Die Beschränkung der Konvergenz auf die Stetigkeitsstellen von  $F$  kann leicht fallen gelassen werden, da für eine monotone Funktion die Anzahl der Unstetigkeitsstellen abzählbar ist.

**Korollar 1.18.** *Es seien  $I, K \subseteq \mathbb{R}$  kompakte Intervalle und für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  sei  $F_n : I \rightarrow K$  eine monoton wachsende Funktion. Dann existiert eine ebenfalls monoton wachsende Funktion  $F : I \rightarrow K$  und eine Teilfolge  $(n_k)_k$  derart, dass*

$$F_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(x) \text{ für alle } x \in I. \quad (1.28)$$

*Beweis.* Durch exakt den gleichen Beweis wie in Hellys Auswahltheorem erhalten wir eine monoton wachsende rechtsstetige Funktion  $G$  mit der Eigenschaft, dass es eine Teilfolge  $(k_\nu)_\nu$  gibt und  $F_{k_\nu}(x)$  für jede Stetigkeitsstelle  $x \in I$  gegen  $G(x)$  konvergiert.

Da nun für eine monoton wachsende Funktion die Menge  $B$  der Unstetigkeitsstellen abzählbar ist, existiert wiederum nach dem Diagonalverfahren, Lemma A.4, eine Teilfolge  $(k_{\nu_m})$  der Teilfolge  $(k_\nu)$ , d. h.

$$(k_{\nu_m})_m \text{ mit } k_{\nu_{m+1}} > k_{\nu_m},$$

sodass auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_{k_{\nu_m}}(b) \text{ für alle } b \in B \text{ existiert.}$$

Bezeichnen wir diese Teilfolge nun abkürzend mit  $(n_k)$ , so definiert

$$F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x)$$

die gesuchte monotone Grenzfunktion. □

Das nachstehende und sogenannte *Konvergenztheorem* beschäftigt sich mit Konvergenzaussagen von Folgen von Lebesgue-Stieltjes-Integralen und wird im nächsten Kapitel verwendet werden.

**Theorem 1.19** (Hellys Konvergenztheorem). *Es seien  $I, K \subseteq \mathbb{R}$  kompakte Intervalle und für alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  sei  $F_n : I \rightarrow K$  eine monoton wachsende Funktion. Es sei  $F$  der punktweise Grenzwert im Sinne von Korollar 1.18 und  $(n_k)$  die dazugehörige Teilfolge. Dann gilt für die Lebesgue-Stieltjes-Integrale*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f(x) dF_{n_k}(x) = \int_I f(x) dF(x) \quad (1.29)$$

für alle stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Wir führen den Beweis nach [KFS75, Chapter 10] aus. Es sei dafür  $\varepsilon > 0$  und eine Zerlegung des Intervalls

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j = [x_0, x_1] \cup \cdots \cup [x_{m-1}, x_m]$$

so gewählt, dass  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  $x, y \in I_j$  und alle  $j$  gilt. Dies ist möglich da  $f$  gleichmäßig stetig ist. Wähle zusätzlich eine Treppenfunktion  $f_\varepsilon$  auf dieser Zerlegung mit  $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in I$ .

Dann betrachte

$$\begin{aligned} \left| \int_I f dF - \int_I f dF_{n_k} \right| &\leq \left| \int_I f dF - \int_I f_\varepsilon dF \right| + \left| \int_I f_\varepsilon dF - \int_I f_\varepsilon dF_{n_k} \right| + \\ &\quad + \left| \int_I f_\varepsilon dF_{n_k} - \int_I f dF_{n_k} \right| \\ &\leq C_1 \varepsilon + \left| \int_I f_\varepsilon dF - \int_I f_\varepsilon dF_{n_k} \right| + C_3 \varepsilon \end{aligned}$$

und man erhält nach Standardabschätzungen Konstanten  $C_1$  und  $C_3$ . Schreiben wir  $a_j$  für den Wert von  $f_\varepsilon$  auf  $I_j$  dann entspricht das zweite Integral der Summe,

$$\sum_{j=1}^m a_j \left( F(x_j^-) - F(x_{j-1}^-) \right) - \sum_{j=1}^m a_j \left( F_{n_k}(x_j^-) - F_{n_k}(x_{j-1}^-) \right)$$

welche nach Hellys Auswahltheorem für  $k \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert. Insgesamt folgt demnach Gleichung (1.29).  $\square$

Das nachfolgende Lemma erweitert Hellys Konvergenztheorem auf den Fall, dass auch die integrierbare Funktion  $f$  durch eine Funktionenfolge angenähert wird, was in späteren Beweisen auftreten wird. Dieses Lemma ist leicht nachzuvollziehen, erscheint dessen ungeachtet aber nicht in der Literatur.

**Lemma 1.20.** *Es seien  $I, K \subseteq \mathbb{R}$  kompakte Intervalle. Weiterhin seien die Funktionen  $(F_n)$ , die Teilfolge  $(n_k)$  sowie die Funktion  $F$  wie in Theorem 1.19 gegeben. Darüber hinaus sei  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von stetigen reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall  $I$ , welche gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $h$  konvergiert. Dann gilt:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I h_{n_k}(x) dF_{n_k}(x) = \int_I h(x) dF(x). \quad (1.30)$$

*Beweis.* Im Beweis wird zur Übersicht die Teilfolge wieder mit  $n$  parametrisiert. Gleichmäßige Konvergenz von  $(h_n)$  bedeutet, dass

$$\|h_n - h\|_\infty := \sup_{x \in I} |h_n(x) - h(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Es sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir wählen  $N$  so groß, dass

$$\left| \int_I h(x) dF_n(x) - \int_I h(x) dF(x) \right| < \varepsilon/2 \text{ und } \|h_n - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$$

für alle  $n \geq N$  gilt. Wir schreiben hier  $\lambda(K)$  für das endliche Lebesguemaß der kompakten Menge  $K$ . Demnach finden wir für ein  $n \geq N$  mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \int_I h_n(x) dF_n(x) - \int_I h(x) dF(x) \right| &< \left| \int_I h_n(x) dF_n(x) - \int_I h(x) dF_n(x) \right| + \varepsilon/2 \\ &\leq \int_I |h_n(x) - h(x)| dF_n(x) + \varepsilon/2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)} \int_I dF_n(x) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt beachte man, dass  $F_n$  in die kompakte Menge  $K$  abbildet und deswegen  $\mu_{F_n}(I) \leq \max K - \min K = \lambda(K)$  gilt.  $\square$

### 1.5. Träger von Maßen

Wenn wir in diesem Abschnitt von Maßen bzw. Borelmaßen reden, so sind damit alle besprochene Wertebereiche eingeschlossen, d. h. sowohl positive, signierte, komplexe als auch operatorwertige Maße. Im Folgenden werden wir für Borelmaße einen sogenannten *Träger* definieren, also eine Menge, außerhalb derer das Maß identisch verschwindet. In diesem Abschnitt entnehmen wir viele Bezeichnungen aus [GT00].

**Definition 1.21.** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu, \nu$  zwei Maße auf diesem.

- (a)  $\nu$  heißt *absolut stetig* bezüglich  $\mu$ , wenn jede  $\mu$ -Nullmenge auch eine  $\nu$ -Nullmenge ist. Man schreibt üblicherweise  $\nu \ll \mu$ .
- (b)  $\nu$  heißt *singulär* bezüglich  $\mu$ , wenn es eine messbare Menge  $N$  derart gibt, dass sowohl  $\nu(X \setminus N) = 0$  als auch  $\mu(N) = 0$  gilt. Man schreibt in diesem Fall  $\nu \perp \mu$ .
- (c) Die zwei Maße  $\nu$  und  $\mu$  heißen *äquivalent* zueinander, wenn beide Maße die gleichen Nullmengen besitzen. Dies schreibt man dann als  $\mu \sim \nu$ .

**Definition 1.22.** Es sei  $\mu$  ein Borelmaß auf einem topologischen Raum  $X$ .

- (a) Ist das Maß  $\mu$  positiv, so nennt man

$$\text{supp}(\mu) := \{x \in X \mid \text{jede offene Umgebung } U \text{ von } x \text{ erfüllt } \mu(U) \neq 0\}$$

den *topologische Träger* des Maßes  $\mu$ .

- (b) Eine messbare Teilmenge  $S \subseteq X$  heißt ein *Träger* des Maßes  $\mu$ , wenn  $\mu(X \setminus S) = 0$  gilt. Man schreibt dann zur Verdeutlichung auch oft  $S(\mu)$ .
- (c) Ein Träger  $S(\mu)$  heißt *minimal* bezüglich eines weiteren Borelmaßes  $\rho$ , wenn jeder kleinere Träger  $T(\mu) \subseteq S(\mu)$  des Maßes  $\mu$  für das Maß  $\rho$  nicht unterscheidbar ist, d. h. es gilt  $\rho(S(\mu) \setminus T(\mu)) = 0$ .

Minimale Träger eines Maßes  $\mu$  sind demnach bis auf Mengen, die bezüglich  $\mu$  und  $\rho$  Nullmengen sind, eindeutig bestimmt. Man beachte, dass die Definition eines Trägers auch für komplexwertige und operatorwertige Maße sinnvoll bleibt, während man den topologischen Träger vorerst nur für positive Maße sinnvoll definieren kann. Einen topologischen Träger für signierte oder komplexe Maße könnte man hingegen auf natürliche Weise mit Hilfe der Hahn-Jordan-Zerlegung definieren.

Mit Hilfe dieser Definition können bekannte Maßeigenschaften auch über Träger der Maße erklärt werden:

Zwei Borelmaße  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sind genau dann singulär zueinander, wenn es jeweils einen Träger gibt und diese beiden disjunkt zueinander sind.

Falls zwei Maße  $\mu_1$  und  $\mu_2$  jeweils absolut stetig bezüglich  $\nu$  sind und beide einen gemeinsamen minimalen Träger bezüglich  $\nu$  haben, dann sind  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sogar äquivalent.

Das Referenzmaß  $\nu$  wird ab sofort immer das Lebesguemaß auf der Borelschen Sigma-Algebra  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  sein und deswegen nicht mehr explizit erwähnt, d. h. man spricht nur noch abkürzend von *minimalen Trägern*.

Es sei noch erwähnt, dass der topologische Träger im Allgemeinen kein Träger im obigen Sinne sein muss, d. h. es kann durchaus  $\mu(X \setminus \text{supp}(\mu)) \neq 0$  gelten. Ein Beispiel findet sich in [AB06, 12.15 Example]. Für Radonmaße auf  $\mathbb{R}$ , siehe dazu die kommende Definition 1.36, ist dies allerdings nicht der Fall. Der topologische Träger erfüllt demnach in diesem Zusammenhang seinen Namen.

In der Literatur wird der Begriff *Träger* bzw. *support* nicht einheitlich verwendet. Manchmal wird auch noch ein weiterer Begriff, z. B. *carrier*, eingeführt. Wir haben uns hier an die Definitionen, wie sie in [GT00] und [Tes09] vorkommen, gehalten.

## 1.6. Lebesguescher Zerlegungssatz

In diesem Abschnitt folgen wir [Rud09] und formulieren und beweisen den für uns sehr wichtigen Lebesgueschen Zerlegungssatz. Dazu ist eine gewisse Vorarbeit notwendig, die wir hier kurz vorstellen möchten.

**Definition 1.23.** Es sei  $\mu$  ein komplexes Maß auf der Sigma-Algebra  $\mathcal{A}$ . Dann heißt die Abbildung  $|\mu| : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , definiert durch

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \mid (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ Zerlegung von } A \right\}, \quad (1.31)$$

die *Totalvariation von  $\mu$* . Unter einer *Zerlegung von  $A$*  verstehen wir dabei, dass die Mengen  $A_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) paarweise disjunkt sind und  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  gilt.

**Satz 1.24.** Die Totalvariation eines komplexen Maßes ist ein positives Maß.

*Beweis.* Hier ist nur die Sigma-Additivität zu zeigen. Siehe dazu zum Beispiel [Rud09, Satz 6.2].  $\square$

Da der Lebesguesche Zerlegungssatz eine große Rolle in dieser Arbeit spielt, möchten wir auch den Beweis vorstellen, wobei wir uns an die Darstellung in [Rud09] halten. Wir benötigen jedenfalls zuerst zwei technische Lemmata.

**Lemma 1.25.** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu$  ein positives  $\sigma$ -endliches Maß. Dann gibt es eine Funktion  $w \in L^1(\mu)$  mit  $0 < w(x) < 1$  für alle  $x \in X$ .

*Beweis.* Diesen Beweis findet man z. B. in [Rud09, Lemma 6.9]. Da das positive Maß  $\sigma$ -endlich ist, existiert eine gegen  $X$  aufsteigende Folge von Mengen  $A_n$  mit endlichem Maß. Man definiert für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktionen

$$w_n(x) := \begin{cases} 2^{-n}/(1 + \mu(A_n)) & , x \in A_n \\ 0 & , x \notin A_n \end{cases}$$

und  $w(x) := \sum_n w_n(x)$  erfüllt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 1.26.** *Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $\mu$  ein positives endliches Maß und  $f \in L^1(\mu)$ . Liegen nun für alle  $A \in \mathcal{A}$  die Mittelwerte*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu$$

*in einer abgeschlossenen Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$ , so ist auch  $f(x) \in S$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ .*

*Beweis.* Diesen kurzen Beweis entnehmen wir aus [Rud09, Satz 1.20]. Es sei  $y \in S^c$  im Komplement und  $r > 0$  so gewählt, dass die abgeschlossene Kugel  $B_r(y) \subseteq \mathbb{C}$  komplett in  $S^c$  liegt. Definieren wir die Menge  $D := f^{-1}(B_r(y))$ , so wissen wir nach

$$\left| \int_D f d\mu - y \mu(D) \right| \leq \int_D |f - y| d\mu \leq r \mu(D),$$

dass nur  $\mu(D) = 0$  gelten kann, denn sonst wäre

$$\frac{1}{\mu(D)} \int_D f d\mu \in S^c$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Da diese Argumentation für alle  $y \in S^c$  funktioniert, gilt  $f(x) \in S$   $\mu$ -fast-überall.  $\square$

Mit diesen Hilfsaussagen können wir nun den wichtigen Zerlegungssatz beweisen, welcher uns durch die gesamte Arbeit begleiten wird.

**Theorem 1.27.** *Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $\nu$  ein positives  $\sigma$ -endliches Maß und  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß, welches entweder positiv, signiert oder komplex ist.*

(a) *Es gibt eindeutig bestimmte Maße  $\mu_{ac}$  und  $\mu_s$  auf  $(X, \mathcal{A})$  so, dass die folgende Zerlegung gilt:*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s, \quad \mu_{ac} \ll \nu, \quad \mu_s \perp \nu. \quad (1.32)$$

*Falls  $\mu$  positiv ist, sind beide Maße ebenfalls positiv. Falls  $\mu$  komplex ist, so sind  $\mu_{ac}$  und  $\mu_s$  auch komplex.*

(b) *Es gibt eine  $\nu$ -f. ü. eindeutig bestimmte messbare Funktion  $h$  mit*

$$\mu_{ac}(A) = \int_A h d\nu \quad (1.33)$$

*für jedes  $A \in \mathcal{A}$ . Ist  $\mu$  ein endliches Maß, so gilt  $h \in L^1(\nu)$ .*

Man nennt Teil (a) den *Lebesgueschen Zerlegungssatz* und Teil (b) den Satz von *Radon-Nikodým*. Beide werden wir durchgängig verwenden und besonders für den Fall, dass das Referenzmaß  $\nu$  dem Lebesguemaß entspricht, genauer betrachten.

*Beweis. Eindeutigkeit.* Um die Eindeutigkeit der Zerlegung in Teil (a) für ein endliches Maß  $\mu$  zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe zwei Zerlegungen  $(\mu_{ac}, \mu_s)$  und  $(\mu'_{ac}, \mu'_s)$ . Dann gilt

$$\mu_{ac} - \mu'_{ac} = \mu'_s - \mu_s, \quad \mu_{ac} - \mu'_{ac} \ll \nu, \quad \mu'_s - \mu_s \perp \nu$$

und daraus folgt, dass beide Differenzen das Nullmaß sind. Ist  $\mu$  nun nicht endlich aber  $\sigma$ -endlich, so kann man mit Ausschöpfungsargumenten die Eindeutigkeit zeigen. Siehe [Kle06].

Nehmen wir für Teil (b) an, dass zwei Funktionen  $h$  und  $\tilde{h}$  mit der Eigenschaft (1.33) existieren, dann ergibt dies nach der Integrationstheorie sofort  $h = \tilde{h}$   $\nu$ -f. ü. und somit ist die Eindeutigkeitsaussage des Theorems bewiesen.

*Existenz.* Diesen Beweis entnehmen wir größtenteils aus [Rud09, Satz 6.10] und [Kle06, Satz 7.33]. Die Ideen gehen ursprünglich auf v. Neumann zurück.

1. *Fall:* Wir nehmen  $\mu$  als positiv und endlich an. Da  $\nu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß ist, können wir eine Funktion  $w$  nach Lemma 1.25 so wählen, dass  $w d\nu$  ein endliches Maß definiert. Damit ist auch  $d\alpha = d\mu + w d\nu$  ein endliches Maß und mit der Hölderschen Ungleichung gilt für ein  $f \in L^2(\alpha) := L^2(\mathbb{R}, \alpha)$

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \leq \int |f| d\alpha \leq \|f\|_{L^2(\alpha)} \cdot (\alpha(X))^{1/2},$$

womit folgt, dass  $f \mapsto \int f d\mu$  ein stetiges lineares Funktional auf  $L^2(\alpha)$  ist. Mit dem Darstellungssatz von Riesz gibt es dann ein  $g \in L^2(\alpha)$  derart, dass

$$\int f d\mu = \int gf d\alpha \quad (1.34)$$

für alle  $f \in L^2(\alpha)$  gilt.

Setzen wir in der obigen Formel (1.34)  $f = \chi_A$  für ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\alpha(A) > 0$  ein und beachten, dass  $0 \leq \mu(A)/\alpha(A) \leq 1$  gilt, so erhalten wir

$$0 \leq \frac{1}{\alpha(A)} \int_A g d\alpha \leq 1.$$

Mit dieser Gleichung und Lemma 1.26 folgt, dass  $g(x) \in [0, 1]$  für  $\alpha$ -fast alle  $x \in X$ .

Wir definieren nun  $Z := g^{-1}(\{1\})$  und die beiden Maße

$$\mu_{ac}(A) := \mu(A \setminus Z) \quad \text{und} \quad \mu_s(A) := \mu(A \cap Z),$$

wobei man direkt die Zerlegung  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$  sieht. Nun zeigen wir, dass  $\mu_s$  bzw.  $\mu_{ac}$  singulär bzw. absolut stetig zum Referenzmaß  $\nu$  ist. Dazu formen wir die obige Gleichung (1.34) in

$$\begin{aligned} \int_X (1-g)f d\mu &= \int_X fg d\alpha - \int_X gf d\alpha + \int_X gfw d\nu \\ &= \int_X gfw d\nu \end{aligned} \quad (1.35)$$

um und setzen  $f = \chi_Z$  ein. Da die linke Seite verschwindet und  $w$  an keiner Stelle den Wert 0 annimmt, muss  $\nu(Z) = 0$  gelten, d. h.  $\mu_s \perp \nu$ .

Es sei nun  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\nu(A) = 0$ . Dann gilt auch  $\nu(B) = 0$  für  $B := A \setminus Z$ . Setzen wir nun in Gleichung (1.35)  $f = \chi_B$  ein, so erhalten wir

$$0 = \int_B (1-g) d\mu.$$

Da aber nun die Funktion  $g$  eingeschränkt auf  $B$  echt kleiner 1 ist, kann wieder nur  $\mu(B) = 0$  gelten und somit auch  $\mu_{ac}(A) = \mu(A \setminus Z) = 0$ . Die bedeutet nun  $\mu_{ac} \ll \nu$ . Die Radon-Nikodým-Dichte  $h$  definieren wir durch

$$h := \frac{g}{1-g} w \chi_{Z^c}$$

und zeigen die Aussage (1.33) durch folgende Rechnung

$$\int_A h d\nu = \int g \frac{1}{1-g} \chi_{A \cap Z^c} w d\nu \stackrel{(1.35)}{=} \int_{A \cap Z^c} d\mu = \mu_{ac}(A).$$

Da  $\mu_{ac}(X) < \infty$  ist, muss  $h \in L^1(\nu)$  sein.

2. *Fall:* Ist das positive Maß  $\mu$  nun nicht mehr endlich, so kann man Dank der  $\sigma$ -Endlichkeit den ganzen Beweis mit Ausschöpfungsargumenten wiederholen. Nur die Eigenschaft  $h \in L^1(\nu)$  ist dann nicht mehr zu erhalten.

3. *Fall:* Ist  $\mu$  nun ein signiertes Maß, so betrachtet man die sogenannte *positive* bzw. *negative Variation*

$$\mu^\pm = \frac{1}{2}(|\mu| \pm \mu).$$

Dies sind offensichtlich positive Maße, sodass Fall 2 angewendet werden kann. Da nun auch  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  gilt, erhält man sofort die entsprechende Lebesgue-Zerlegung.

4. *Fall:* Für ein komplexes Maß  $\mu$  hat man natürlich immer die Zerlegung in Realteil und Imaginärteil, d. h.  $\mu = \mu_{\mathbb{R}} + i\mu_{\mathbb{S}}$ , wobei diese zwei Maße signiert sind und somit der dritte Fall anwendbar ist.  $\square$

**Bemerkung 1.28.** Unter schwächeren Voraussetzungen gilt der Satz in dieser Form nicht mehr. Ein einfaches Gegenbeispiel stellen wir kurz vor:

Es sei das Intervall  $(0, 1)$  mit der Borelschen Sigma-Algebra  $\mathfrak{B}((0, 1))$  gegeben. Darauf sei nun  $\nu = \lambda$  das Lebesgue-Maß und  $\mu$  das Zählmaß. Offensichtlich ist das Maß  $\mu$  weder absolut stetig noch singular bezüglich des Lebesguemaßes. Gäbe es nun eine Zerlegung  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ , so gälte  $\mu_s(\{x\}) = 1$  für alle  $x \in (0, 1)$ , d. h. für  $\mu_s$  und  $\lambda$  gäbe es keinen disjunkten Träger. Somit kann es keine Lebesguezerlegung geben.

Für die weitere Diskussion wird es wichtig werden, sogenannte *Atome* des Maßes separat zu behandeln. Betrachtet man Borelmaße auf  $\mathbb{R}$ , so versteht man darunter die Punkte, denen ein nichtverschwindendes Maß zugeordnet wird. Wir formulieren diesen Begriff dagegen wie in [Els99] möglichst allgemein.

**Definition 1.29.** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu$  ein Maß. Eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  heißt ein  $\mu$ -Atom, wenn  $\mu(A) \neq 0$  und zusätzlich entweder  $\mu(B) = 0$  oder  $\mu(A \setminus B) = 0$  für alle  $B \in \mathcal{A}$  mit  $B \subseteq A$  gilt.

Das Maß  $\mu$  heißt dann *atomlos*, wenn es keine  $\mu$ -Atome gibt. Dagegen heißt  $\mu$  *rein atomar*, wenn es eine endliche oder abzählbare Menge  $\{A_1, A_2, \dots\}$  von  $\mu$ -Atomen gibt mit

$$\mu(X \setminus \{A_1, A_2, \dots\}) = 0. \quad (1.36)$$

Wie man leicht sieht, ist das Lebesguemaß  $\lambda$  auf der Borelschen Sigma-Algebra atomlos und damit ist auch jedes zu  $\lambda$  absolut stetige Maß atomlos. Demnach ergibt sich aus Theorem 1.27 folgende wichtige Aufspaltung von Maßen auf der Borelschen Sigma-Algebra:

**Korollar 1.30.** *Für ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ , welches entweder positiv, signiert, komplex oder verallgemeinert komplex ist, gibt es eine eindeutige Zerlegung bezüglich des Lebesguemaßes:*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s, \quad \mu_{ac} \ll \lambda, \quad \mu_s \perp \lambda. \quad (1.37)$$

Weiterhin kann man  $\mu_s$  eindeutig in einen atomlosen Anteil  $\mu_{sc}$  und ein rein atomares Maß  $\mu_{pp}$  aufteilen und erhält somit:

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}. \quad (1.38)$$

Hier wird  $\mu_{ac}$  der absolut stetige Anteil,  $\mu_{sc}$  der singular stetige Anteil und  $\mu_{pp}$  der rein atomare Anteil von  $\mu$  genannt. Die Summe  $\mu_s$  wird als der singuläre Anteil von  $\mu$  bezeichnet.

Im Falle eines verallgemeinerten komplexen Maßes gilt die obige Eindeutigkeit möglicherweise nur noch für die jeweiligen Einschränkungen auf beschränkte Mengen (vgl. Definition 1.7).

*Beweis.* Es ist nur zu zeigen, dass man auch für verallgemeinerte komplexe Maße eine Lebesguezerlegung erhält. Diese kann man mit der Hahn-Jordan-Zerlegung und dem Fortsetzungssatz von Carathéodory auf natürliche Weise konstruieren. Die Eindeutigkeitsaussage gilt dann schließlich nur für die komplexe Maße  $\mu_K$ , wobei  $K \subseteq \mathbb{R}$  eine kompakte Teilmenge ist. Man vergleiche dazu Definition 1.7.  $\square$

Die Indizes werden üblicherweise nach den englischen Begriffen *absolutely continuous*, *singular continuous* und *pure point* bezeichnet.

Im gesamten Abschnitt haben wir keine operatorwertigen Maße erwähnt, da diese einerseits in der gängigen Maßtheorie nicht aufgenommen werden und andererseits eine analoge Aussage leicht aus obigen Resultaten folgt.

**Korollar 1.31.** *Es sei  $\mathfrak{H}$  ein Hilbertraum. Für ein operatorwertiges oder verallgemeinert operatorwertiges Maß  $\Omega$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  gibt es eine eindeutige Zerlegung bezüglich des Lebesguemaßes:*

$$\Omega = \Omega_{ac} + \Omega_s, \quad \Omega_{ac} \ll \lambda, \quad \Omega_s \perp \lambda. \quad (1.39)$$

Weiterhin gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$\Omega = \Omega_{ac} + \Omega_{sc} + \Omega_{pp}, \quad \Omega_{sc} \text{ atomlos}, \quad \Omega_{pp} \text{ rein atomar}. \quad (1.40)$$

Dabei sind alle obigen Maße operatorwertig oder verallgemeinert operatorwertig.

Im Falle eines verallgemeinerten operatorwertigen Maßes bezieht sich die Eindeutigkeitsaussage allerdings nur auf die Einschränkungen auf beschränkte Mengen (vgl. Definition 1.10).

*Beweis.* Man verwendet Korollar 1.30 um die verallgemeinerten komplexe Maße  $\Omega_{y,x} = \langle y, \Omega(\cdot)x \rangle$  zu zerlegen:

$$\Omega_{y,x} = (\Omega_{y,x})_{ac} + (\Omega_{y,x})_{sc} + (\Omega_{y,x})_{pp} .$$

Nun definieren wir für eine Borelmenge  $B \subseteq \mathbb{R}$  den Operator  $\Omega_{ac}(B)$  wie üblich als den eindeutig bestimmten Operator, der  $\langle y, \Omega_{ac}(B)x \rangle = (\Omega_{y,x})_{ac}(B)$  für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  erfüllt. Auch hier verwenden wir die Konvention  $\langle y, \infty x \rangle = \infty$ . Analog verfahren wir auch für den singular stetigen und den rein atomaren Anteil und erhalten somit die Zerlegung des verallgemeinerten operatorwertigen Maßes  $\Omega$ . Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus Theorem 1.27.  $\square$

Wir kommen nun auf dem im ersten Abschnitt formulierten Satz über die Hahn-Jordan-Zerlegung zurück.

**Satz 1.32** (Polarzerlegung). *Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Für ein komplexes Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$  gibt es eine messbare Funktion in den Einheitskreis, d. h. eine Funktion  $u : X \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , mit*

$$\mu(A) = \int_A u d|\mu|$$

für alle messbaren Mengen  $A \in \mathcal{A}$ . Man schreibt dann abkürzend  $d\mu = u d|\mu|$ .

*Beweis.* Der Satz folgt aus dem Lebesgueschen Zerlegungssatz und einen Beweis findet man in [Rud09, 6.12 Satz].  $\square$

**Satz 1.33** (Hahn-Jordan-Zerlegung). *Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Für ein endliches signiertes Maß  $\mu$  sind die positive und negative Variation, definiert durch*

$$\mu^\pm = \frac{1}{2}(|\mu| \pm \mu) , \tag{1.41}$$

singular zueinander.

Insbesondere existiert für jedes komplexe Maß  $\nu$  eine eindeutige Zerlegung in positive Maße

$$\nu = \nu_{\mathfrak{R}}^+ - \nu_{\mathfrak{R}}^- + i\nu_{\mathfrak{S}}^+ - i\nu_{\mathfrak{S}}^- , \tag{1.42}$$

für welche  $\nu_{\mathfrak{R}}^+ \perp \nu_{\mathfrak{R}}^-$  und  $\nu_{\mathfrak{S}}^+ \perp \nu_{\mathfrak{S}}^-$  gilt.

*Beweis.* Wir folgen den Ideen aus [Rud09, 6.14 Satz] und nehmen  $\mu$  als signiertes und endliches Maß auf dem messbaren Raum  $(X, \mathcal{A})$  an. Nach der Polarzerlegung existiert also ein  $u$  so, dass

$$\mu(A) = \int_A u d|\mu|$$

für alle messbare Mengen  $A$  gilt. Es folgt unmittelbar, dass  $u(x) = \pm 1$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ . Definieren wir die Mengen

$$M^\pm := \{x \in X \mid u(x) = \pm 1\} ,$$

so gilt

$$\frac{1+u(x)}{2} = \begin{cases} u(x) & , x \in M^+ \\ 0 & , x \in M^- \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{1-u(x)}{2} = \begin{cases} -u(x) & , x \in M^- \\ 0 & , x \in M^+ \end{cases} .$$

Daraus folgt nun für eine messbare Menge  $A$ :

$$\mu^\pm(A) = \frac{1}{2}(|\mu|(A) \pm \mu(A)) = \int_A \frac{(1 \pm u)}{2} d|\mu| = \pm \mu(A \cap M^\pm) .$$

Das heißt, dass die positive und negative Variation singulär zueinander sind.

Da ein komplexes Maß  $\nu$  eine Linearkombination von endlichen signierten Maßen ist, folgt Gleichung (1.42) aus Obigem.  $\square$

## 1.7. Absolut stetige und singuläre Funktionen

In diesem Abschnitt verwenden wir [Els99] und [KFS75] und werden kurz den Zusammenhang zwischen den Bezeichnungen *absolut stetig* und *singulär stetig* von Maßen und den gleichlautenden Bezeichnungen von Funktionen klären.

**Definition 1.34.** (a) Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *absolut stetig*, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass für jede abzählbare Familie von disjunkten Intervallen  $(x_k, y_k)$  mit

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta$$

ebenso auch

$$\sum_k |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon$$

gilt.

Eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *absolut stetig*, wenn die Einschränkung auf jedes kompaktes Intervall  $K \subseteq \mathbb{R}$ , d. h. die Funktion  $F|_K$ , absolut stetig ist.

(b) Eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *singulär stetig*, wenn sie stetig und monoton ist und  $\lambda$ -f. ü. differenzierbar ist mit  $F'(x) = 0$  für  $\lambda$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(c) Eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Sprungfunktion*, wenn es zwei abzählbare Mengen  $L \subseteq \mathbb{R}$  und  $R \subseteq \mathbb{R}$ , eine reelle Zahl  $\alpha$  und jeweils eine Funktion  $p_L : L \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_R : R \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, welche folgendes erfüllen: Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{y \in L \cap [-n, n]} |p_L(y)| < \infty, \quad \sum_{y \in R \cap [-n, n]} |p_R(y)| < \infty$$

und die Funktion  $F$  ist gegeben als

$$F(x) = \begin{cases} \alpha + \sum_{y \in L \cap [0, x)} p_L(y) + \sum_{y \in R \cap (0, x]} p_R(y) & , x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \\ \alpha - \sum_{y \in L \cap [x, 0)} p_L(y) - \sum_{y \in R \cap (x, 0]} p_R(y) & , x < 0 \end{cases} . \quad (1.43)$$

Ein typisches Beispiel für eine absolut stetige Funktion ist eine differenzierbare Funktion oder auch eine Stammfunktion einer integrierbaren Funktion  $f$ , d. h.

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(y) dy$$

ist immer absolut stetig. Man kann zeigen, dass alle absolut stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen von dieser Form sind.

Das klassische Beispiel einer singularär stetigen Funktion ist die Cantorfunktion, welche  $\lambda$ -f. ü. differenzierbar ist und an diesen Stellen  $F' = 0$  erfüllt, aber trotzdem stetig und monoton wachsend ist mit  $F(0) = 0$  und  $F(1) = 1$ .

Der folgende Zerlegungssatz zeigt nun den Zusammenhang zwischen den namentlich gleichen Begriffen von Funktionen und Maßen.

**Satz 1.35.** *Jede monotone Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich zerlegen in*

$$F = F_{ac} + F_{sc} + F_{pp}, \quad (1.44)$$

wobei  $F_{ac}$  absolut stetig,  $F_{sc}$  singularär stetig und  $F_{pp}$  eine Sprungfunktion ist.

Für die zugeordneten Lebesgue-Stieltjes-Maße entspricht

$$\mu_F = \mu_{F_{ac}} + \mu_{F_{sc}} + \mu_{F_{pp}} \quad (1.45)$$

der Lebesguezerlegung aus Korollar 1.30.

*Beweis.* Siehe [BSU96, Theorem 8.3] □

Die Funktionen aus (1.44) sind nur bis auf Konstanten eindeutig bestimmt. Um Eindeutigkeit zu erhalten, muss man sich wieder auf eine Normierung, wie z. B.  $F_{ac,sc}(0) = 0$ , einigen.

## 1.8. Differentiation von Radonmaßen

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Ableitung von Borelmaßen auf  $\mathbb{R}^n$  zu. Diese wird analog zum Ableitungsbegriff von Funktionen definiert, wobei hier der Quotient von zwei verschiedenen Borelmaßen in einem gewissen Grenzwert betrachtet wird. Wir werden gleich sehen, dass der so definierte Differentiationsbegriff eng mit der bekannten Radon-Nikodým-Ableitung zusammenhängt.

Wir möchten nun noch kurz an den wichtigen Begriff des Radonmaßes erinnern.

**Definition 1.36.** Es sei  $X$  ein Hausdorffraum,  $\mathcal{A}$  die Borelsche Sigma-Algebra auf  $X$  und  $\mu$  ein positives Borelmaß.  $\mu$  heißt ein *Radonmaß*, wenn  $\mu$  lokal endlich und von innen regulär ist, d. h. für jedes  $A \in \mathcal{A}$  gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}. \quad (1.46)$$

Diese allgemeine Definition erfordert den Begriff der Regularität eines Maßes, welcher hingegen für Borelmaße des  $\mathbb{R}^n$  automatisch erfüllt ist:

**Satz 1.37.** *Ein positives Borelmaß auf  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann ein Radonmaß, wenn es auf allen kompakten Mengen endliche Werte annimmt.*

*Beweis.* Siehe hierfür [Els99, 1.12 Korollar].  $\square$

Wenn wir von einem signierten Radonmaß sprechen, so meinen wir damit, dass die positive und negative Variation aus Satz 1.33 Radonmaße im obigen Sinne sind. Zur besseren Unterscheidung werden wir auch in diesem Abschnitt explizit von *positiven* Radonmaßen sprechen.

**Definition 1.38.** Es seien  $\mu$  und  $\nu$  positive Radonmaße auf  $\mathbb{R}^n$ . Für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  definieren wir folgende Abbildungen.

$$(\overline{D}_\nu \mu)(x) := \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(U_r(x))}{\nu(U_r(x))} & , \text{ falls } \nu(U_r(x)) > 0 \text{ für alle } r > 0 \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (1.47)$$

$$(\underline{D}_\nu \mu)(x) := \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(U_r(x))}{\nu(U_r(x))} & , \text{ falls } \nu(U_r(x)) > 0 \text{ für alle } r > 0 \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (1.48)$$

Hier steht  $U_r(x)$  für die offene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$ . Falls  $(\overline{D}_\nu \mu)(x) = (\underline{D}_\nu \mu)(x)$  gilt, nennen wir  $\mu$  *an der Stelle  $x$  nach  $\nu$  differenzierbar* und bezeichnen

$$(D_\nu \mu)(x) := (\overline{D}_\nu \mu)(x) = (\underline{D}_\nu \mu)(x) \quad (1.49)$$

als die *Ableitung von  $\mu$  bezüglich  $\nu$  an der Stelle  $x$* . Anstatt  $D_\nu \mu$  schreibt man auch häufig  $d\mu/d\nu$ .

Die obige Definition der Ableitung für Radonmaße wurde [EG92, Chapter 1.6] entnommen. Der Begriff lässt sich aber auch auf signierte Radonmaße und komplexe Maße übertragen:

**Definition 1.39.** Es sei  $\mu$  ein signiertes Radonmaß oder ein komplexes Maß auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\nu$  ein positives Radonmaß auf  $\mathbb{R}^n$ . Für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$(D_\nu \mu)(x) := \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(U_r(x))}{\nu(U_r(x))} & , \text{ falls } \nu(U_r(x)) > 0 \text{ für alle } r > 0 \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (1.50)$$

falls der obige Grenzwert existiert. In diesem Falle nennen wir  $\mu$  *an der Stelle  $x$  nach  $\nu$  differenzierbar* und  $(D_\nu \mu)(x)$  die *Ableitung von  $\mu$  bezüglich  $\nu$  an der Stelle  $x$* . Auch hier verwendet man oft die Schreibweise  $d\mu/d\nu$ .

Wir werden uns im Weiteren auf den Fall beschränken, dass bezüglich des Lebesgue-maßes  $\lambda$  differenziert wird. Es sei noch betont, dass wir auch von Differenzierbarkeit an der Stelle  $x$  sprechen, wenn  $(D_\nu \mu)(x) = \infty$  gilt. Gerade diese Punkte werden sich nämlich später als sehr interessant und wichtig herausstellen.

**Satz 1.40.** Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende Funktion und  $\mu_F$  das zugeordnete Lebesgue-Stieltjes-Maß. Dann ist  $F$  genau dann in  $x$  differenzierbar, wenn  $\mu_F$  an der Stelle  $x$  nach  $\lambda$  differenzierbar ist. Es gilt in diesem Fall

$$F'(x) = (D_\lambda \mu_F)(x) \quad (1.51)$$

bzw. in anderer Schreibweise

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{d\mu_F}{d\lambda}(x). \quad (1.52)$$

Die Gleichheit gilt auch für den uneigentlichen Wert  $\infty$ .

*Beweis.* Der Satz folgt direkt aus der Tatsache, dass

$$(D_{\lambda}\mu_F)(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{F(x+r) - F(x-r)}{2r} = F'(x)$$

für alle reellen Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  gilt, für die die Grenzwerte existieren.  $\square$

Der folgende Satz ist als Lebesguesches Ableitungstheorem bzw. als *Lebesgue differentiation theorem* bekannt und zeigt eine bemerkenswerte Eigenschaft von Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezogen auf deren Oszillationsverhalten.

**Theorem 1.41** (Lebesgue). *Es sei  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$  als Maßraum und eine Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$  gegeben. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y) = 0$$

für  $\lambda$ -fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Inbesondere gilt für diese Punkte

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f(y) d\lambda(y).$$

*Beweis.* Für diesen technischen Beweis verweisen wir auf [Sch05, Theorem 19.20] und auf [Rud09, Satz 7.7].  $\square$

Der Begriff der Differentiation eines Maßes ist direkt mit dem Lebesgueschen Zerlegungssatz verknüpft. Die nächsten Aussagen werden zeigen, dass die Radon-Nikodým-Ableitung aus Theorem 1.27 im Wesentlichen mit der oben definierten Ableitung überstimmt und dass für singuläre Maße die Ableitung fast überall verschwindet.

**Satz 1.42.** *Es sei  $\mu$  ein signiertes Radonmaß oder ein komplexes Maß auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mu \ll \lambda$ . Dann existiert eine messbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda \quad (1.53)$$

für alle Borelmengen  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diese Funktion  $f$  heißt die Radon-Nikodým-Ableitung und ist  $\lambda$ -f. ü. eindeutig bestimmt.

Darüber hinaus gilt

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = f \quad \lambda\text{-f. ü.} \quad (1.54)$$

und so auch die einprägsame Formel

$$\int_E g d\mu = \int_E g \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda \quad (1.55)$$

für jede  $\mu$ -integrierbare Funktion  $g$  und Borelmenge  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Die erste Aussage ist der Satz von Radon-Nykodým aus Theorem 1.27. Für ein komplexes Maß gilt  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$  und mit Hilfe von Theorem 1.41 gilt demnach für  $\lambda$ -fast alle  $x$

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f(y) d\lambda(y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))} = \frac{d\mu}{d\lambda}(x).$$

Ist das Maß nicht endlich, so kann die Aussage mit Ausschöpfungsargumenten bewiesen werden. Siehe dazu [Sch05, Corollary 19.21].  $\square$

**Satz 1.43.** *Es sei  $\mu$  ein positives Radonmaß auf  $\mathbb{R}^n$ , welches singular bezüglich des Lebesguemaßes ist,  $\mu \perp \lambda$ . Dann gilt:*

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = 0 \quad \lambda\text{-f. ü.} \quad (1.56)$$

*Beweis.* Siehe [Sch05, Corollary 19.22].  $\square$

**Satz 1.44.** *Es sei  $\mu$  ein positives Radonmaß auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert  $\frac{d\mu}{d\lambda}$   $\lambda$ -f. ü. und für den absolut stetigen Anteil von  $\mu$  gilt*

$$\mu_{ac}(B) = \int_B \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda \quad (1.57)$$

für jede Borelmenge  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Wir können  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$  mit dem Lebesgueschen Zerlegungssatz eindeutig aufspalten. Dann gilt mit den vorherigen Sätzen

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu_{ac}}{d\lambda} + \frac{d\mu_s}{d\lambda} \quad \lambda\text{-f. ü.}$$

und somit folgt ebenfalls mit Satz 1.42 und Satz 1.43

$$\int_B \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int_B \frac{d\mu_{ac}}{d\lambda} d\lambda = \mu_{ac}(B)$$

für jede Borelmengen  $B$ .  $\square$

Das folgende Theorem, welches minimale Träger eines Maßes und deren Lebesgue-Zerlegung über die Ableitung charakterisiert, findet man in [GP87, Lemma 4], jedoch ohne ausformulierten Beweis. Dies wird hier nachgeholt. Das Theorem wird sich noch als sehr wichtig erweisen, wenn wir uns im nächsten Kapitel mit Herglotzfunktionen beschäftigen.

**Theorem 1.45.** *Es sei  $\mu$  ein positives Radonmaß auf  $\mathbb{R}$ ,  $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$  seine Lebesguezerlegung und  $E$  die Menge der Stellen  $x \in \mathbb{R}$ , an denen  $\mu$  nach dem Lebesguemaß differenzierbar ist. Dann gibt es folgende minimale Träger*

$$(a) \mathcal{M} := \left\{ x \in E \mid \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \in (0, \infty] \right\} \text{ für } \mu,$$

$$(b) \mathcal{M}_{ac} := \left\{ x \in E \mid \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \in (0, \infty) \right\} \text{ für } \mu_{ac},$$

$$(c) \mathcal{M}_s := \left\{ x \in E \mid \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = \infty \right\} \text{ für } \mu_s,$$

$$(d) \mathcal{M}_{sc} := \left\{ x \in E \mid \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = \infty, \mu(\{x\}) = 0 \right\} \text{ für } \mu_{sc},$$

$$(e) \mathcal{M}_{pp} := \left\{ x \in E \mid \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = \infty, \mu(\{x\}) > 0 \right\} \text{ für } \mu_{pp}.$$

*Beweis.* Wir werden nun zuerst die Menge  $\mathcal{M}_s$  untersuchen, da dies der schwierigste Teil des Beweises ist. Die Darstellung  $\mathcal{M}_{ac}$  lässt sich dann vergleichsweise leicht zeigen und die anderen Darstellungen lassen sich anschließend direkt folgern.

*Teil (c):* Für diesen Teil arbeiten wir die Ideen von [Tes09, Theorem A.35] aus. Es sei dafür  $\nu$  ein singuläres Maß und  $O_k := \{x \in \mathbb{R} \mid (D\nu)(x) < k\}$ . Wir wählen für ein  $k \in \mathbb{N}$  eine kompakte Menge  $K_k \subseteq O_k$  und dann für jede natürliche Zahl  $m$  eine offene Menge  $V_m$  mit  $K_k \subseteq V_m$  so, dass immer  $\lambda(V_m \setminus K_k) \leq 1/m$  gilt.

Für jedes  $x \in K_k$  wählen wir eine offene Kugel  $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq V_m$  und zwar so klein, dass  $\nu(U_{3\varepsilon_x}(x)) \leq k \lambda(U_{\varepsilon_x}(x))$  gilt. Da nun  $K_k$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, indiziert mit der endlichen Indexmenge  $J$ :

$$K_k \subseteq \bigcup_{j \in J} U_{\varepsilon_{x_j}}(x_j).$$

Nun ist leicht zu sehen, dass man eine nichtleere Menge  $I \subseteq J$  von diesen Kugeln so auswählen kann, dass diese paarweise disjunkt sind und

$$\bigcup_{j \in J} U_{\varepsilon_{x_j}}(x_j) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_{3\varepsilon_{x_i}}(x_i)$$

erfüllt ist. Mit dieser Auswahl der offenen Kugeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu(K_k) &\leq \nu\left(\bigcup_{j \in J} U_{\varepsilon_{x_j}}(x_j)\right) \leq \nu\left(\bigcup_{i \in I} U_{3\varepsilon_{x_i}}(x_i)\right) = \sum_{i \in I} \nu(U_{3\varepsilon_{x_i}}(x_i)) \\ &\leq k \sum_{i \in I} \lambda(U_{3\varepsilon_{x_i}}(x_i)) = 3k \sum_{i \in I} \lambda(U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)) \leq 3k\lambda(V_m) \end{aligned}$$

und zwar für alle natürliche Zahlen  $m$ , woraus  $\nu(K) \leq 3k\lambda(K)$  folgt. Nun nutzen wir die Regularität der Radonmaße  $\nu$  und  $\lambda$  aus, siehe Definition 1.36, und erhalten:

$$\nu(A) \leq 3k\lambda(A), \quad \text{für jede Borelmenge } A \subseteq O_k.$$

Insbesondere ist  $\nu$  absolut stetig auf jeder Menge  $O_k$ . In Kombination mit der Voraussetzung, dass das Maß singulär ist, kann also nur  $\nu(O_k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gelten.

Somit ist  $\mathcal{M}_s$  ein Träger für den singulären Teil  $\mu_s$ , welcher nach Satz 1.43 und Satz 1.44 minimal bezüglich des Lebesguemaßes ist.

*Teil (b):* Nach obigem Beweis und Satz 1.44 ist auch direkt ersichtlich, dass  $\mathcal{M}_{ac}$  ein Träger für den absolut stetigen Teil  $\mu_{ac}$  ist. Wir zeigen nun, dass dieser minimal ist. Es sei dafür  $T \subseteq \mathcal{M}_{ac}$  ein weiterer Träger von  $\mu_{ac}$ . Dann betrachten wir die  $\mu_{ac}$ -Nullmenge  $N := \mathcal{M}_{ac} \setminus T$  und die Teilmengen  $N_\varepsilon := \{x \in N \mid \varepsilon < D\mu\}$ . Es gilt dann

$$\lambda(N_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{N_\varepsilon} D\mu \, d\lambda = \frac{1}{\varepsilon} \mu_{ac}(N_\varepsilon) = 0$$

und deshalb auch  $\lambda(N) = 0$ .

Die Teile (a), (d) und (e) sind nun direkt zu folgern.  $\square$

Man sollte erwähnen, dass  $\mathcal{M}_{pp}$  nicht nur ein minimaler Träger für das rein atomare Maß  $\mu_{pp}$  ist, sondern auch der kleinste Träger ist, d. h. es gibt keinen anderen Träger  $T$ , der die Inklusion  $T \subsetneq \mathcal{M}_{pp}$  erfüllt. Für rein atomare Maße wird man natürlich immer den kleinstmöglichen Träger angeben, was wir ab sofort auch so handhaben werden.

Die minimalen Träger der stetigen Anteile können dagegen im Allgemeinen nicht kleinstmöglich gewählt werden. Für den Träger des singular stetigen Anteils kann es sogar vorkommen, dass  $\mathcal{M}_s$  nicht leer ist, obwohl das Maß absolut stetig ist. Dies werden wir an folgendem Beispiel demonstrieren.

**Beispiel 1.46.** Es sei das positive Maß  $\mu$  auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  gegeben durch

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{|x|}} d\lambda(x)$$

für jede Borelmenge  $B$ , also insbesondere absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes. Es gilt andererseits offenbar

$$\mathcal{M}_s = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = \infty \right\} = \{0\} \neq \emptyset.$$

Kommen wir nochmals kurz auf den topologischen Träger, welcher in der Spektraltheorie in Kapitel 3 eine größere Rollen spielen wird, zurück. Da  $\text{supp}(\mu)$  für jedes Radonmaß auf  $\mathbb{R}$  ein abgeschlossener Träger ist, kann man nach den Relationen zu den oben definierten minimalen Trägern fragen.

**Satz 1.47.** *Es sei  $\mu$  ein positives Radonmaß auf  $\mathbb{R}$  und alle Bezeichnung wie in Theorem 1.45. Wir notieren mit  $\mu_c := \mu_{ac} + \mu_{sc}$  das atomfreie Maß. Dann gilt für den absolut stetigen bzw. singular stetigen Anteil*

$$\text{supp}(\mu_c) \supseteq \overline{\mathcal{M}_{ac}} \supseteq \text{supp}(\mu_{ac}), \quad (1.58)$$

$$\text{supp}(\mu_c) \supseteq \overline{\mathcal{M}_{sc}} \supseteq \text{supp}(\mu_{sc}) \quad (1.59)$$

und für den rein atomaren Anteil

$$\overline{\mathcal{M}_{pp}} = \text{supp}(\mu_{pp}). \quad (1.60)$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst  $\mathcal{M}_{ac} \subseteq \text{supp}(\mu_c)$ . Es sei dafür  $x \in \mathcal{M}_{ac}$ , d. h. es gilt für das Maß  $\mu((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) > 0$  für alle  $\varepsilon > 0$  und  $\mu(\{x\}) = 0$  nach der Definition der Ableitung. Demzufolge liegt  $x$  auch im topologischen Träger von  $\mu_c$ .

Ist umgekehrt  $x \in \text{supp}(\mu_{ac})$ , so gilt mit dem Satz von Radon-Nykodým, dass

$$\int_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \frac{d\mu}{d\lambda}(y) d\lambda(y) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Das heißt, dass für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $y_\varepsilon$  existiert, für welches

$$\frac{d\mu}{d\lambda}(y_\varepsilon) \in (0, \infty)$$

und  $y_\varepsilon \rightarrow x$  gilt. Somit liegt  $x$  im Abschluss von  $\mathcal{M}_{ac}$ .

Für den singularär stetigen Anteil verläuft der Beweis analog. Beachte dabei, dass  $\mu_{sc}(O_k) = 0$  für alle Mengen  $O_k := \{x \in \mathbb{R} \mid (\underline{D}\mu)(x) < k\}$  gilt.

Die Aussage für den rein atomaren Anteil ist offensichtlich richtig.  $\square$

Hervorzuheben ist, dass in der allgemeinen Situation weder  $\mathcal{M}_{sc} \subseteq \text{supp}(\mu_{sc})$  noch  $\mathcal{M}_{sc} \supseteq \text{supp}(\mu_{sc})$  erfüllt ist. Gleiches gilt für den absolut stetigen Anteil.

## 1.9. Matrixwertige Stieltjes-Maße

Wir erinnern daran, dass matrixwertige bzw. operatorwertige Maße durch einfaches Zurückführen auf komplexe Maße definiert wurden. Auch die von uns sogenannten verallgemeinerten matrixwertigen Maße konnten problemlos aus der skalaren Theorie heraus erreicht werden. Das gleiche Prinzip werden wir nun für die Stieltjes-Maße und -Integrale durchführen.

**Definition 1.48.** Es sei  $\mathfrak{H}$  ein komplexer oder reeller Hilbertraum. Eine operatorwertige Abbildung  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  heißt dann *monoton wachsend*, wenn

(a)  $T(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  selbstadjungiert ist und

(b)  $T(t) - T(s) \geq 0$  für alle  $t > s$  gilt, d. h.

$$\langle x, (T(t) - T(s))x \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{H} .$$

**Definition 1.49.** Es sei  $\mathfrak{H}$  ein komplexer Hilbertraum und  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  eine monoton wachsende Abbildung. Dann ist für alle  $x \in \mathfrak{H}$

$$F_x := \langle x, T(\cdot)x \rangle \tag{1.61}$$

eine reellwertige monoton wachsende Funktion, sodass das zugeordnete Lebesgue-Stieltjes-Maß  $\mu_{F_x}$  nach Definition 1.12 existiert.

Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}$  eine beschränkte Borelmenge. Bekannterweise gibt es durch Polarisierung genau einen Operator  $\Omega(B) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ , der

$$\langle x, \Omega(B)x \rangle = \mu_{F_x}(B) \tag{1.62}$$

für alle  $x \in \mathfrak{H}$  erfüllt. Dadurch wird ein verallgemeinertes operatorwertiges Borelmaß  $\Omega : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \cup \{\infty\}$  festgelegt, welches auf beschränkten Mengen eindeutig bestimmt ist. Dieses heißt das *operatorwertige Lebesgue-Stieltjes-Maß* zu  $T$  und wird mit  $\Omega_T$  bezeichnet. Wie immer sprechen wir im endlichdimensionalen Fall von einem *matrixwertigen Lebesgue-Stieltjes-Maß*.

**Bemerkung 1.50.** Wie im skalaren Fall gelten für beschränkte Intervalle folgende Formeln

$$\begin{aligned} \Omega_T((a, b)) &= T(b^-) - T(a^+), \\ \Omega_T([a, b)) &= T(b^-) - T(a^-), \\ \Omega_T((a, b]) &= T(b^+) - T(a^+), \end{aligned}$$

$$\Omega_T([a, b]) = T(b^+) - T(a^-),$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  und nur der Fall der leeren Menge ausgeschlossen ist.

Das Integral ist nach Definition 1.10 wohldefiniert, wobei man hier oft die praktische Schreibweise

$$\int_a^b g(t) dT(t) := \int_{[a, b]} g(t) d\Omega_T(t) \quad (1.63)$$

verwendet.



## 2. Herglotzfunktionen

In diesem Abschnitt werden holomorphe Funktionen in der oberen Halbebene betrachtet, welche in der Literatur verschiedene Namen tragen. Sehr oft werden sie nach dem deutschen Mathematiker *Gustav Ferdinand Maria Herglotz* oder nach dem finnischen Mathematiker *Rolf Herman Nevanlinna* benannt. Etwas seltener findet man auch Bezeichnungen, die sich auf den österreichischen Mathematiker *Georg Alexander Pick* beziehen.

Herglotzfunktionen und deren Verallgemeinerungen auf den matrix- oder operatorwertigen Fall besitzen viele interessante Eigenschaften, von denen einige als klassische Resultate wohlbekannt sind. Aus diesem Grund ist es nicht immer einfach, die passenden Beweise in der Literatur ausfindig zu machen, sodass in diesem Kapitel viele Aussagen explizit bewiesen werden.

Wir benutzen hier hauptsächlich den Übersichtsartikel [GT00] von F. Gesztesy und E. Tsekanovskii, welcher sich mit matrixwertigen Herglotzfunktionen beschäftigt, und das klassische Werk [AG93] von N. I. Akhiezer und I. M. Glazman.

### 2.1. Skalare Herglotzfunktionen

Diese Einführung in das weite Feld der Herglotzfunktionen beginnt mit der üblichen Definition von Funktionen mit komplexen Werten, genauer mit Werten in der oberen Halbebene. Da wir später matrixwertige Funktionen betrachten werden, verwenden wir manchmal zur besseren Unterscheidung die Bezeichnung *skalare* Herglotzfunktion. Wir schreiben durchgängig  $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  für die offene obere Halbebene.

**Definition 2.1.** Eine holomorphe Funktion  $m : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Herglotzfunktion*, falls  $m(\mathbb{C}_+) \subseteq \mathbb{C}_+$  oder wenn  $m \equiv r$  für ein  $r \in \mathbb{R}$ .

Es scheint wichtig zu bemerken, dass eine holomorphe Funktion  $m$  auf  $\mathbb{C}_+$  genau dann eine Herglotzfunktion ist, wenn  $\text{Im } m(z) \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}_+$  gilt. Nach dem Satz der Gebietstreue bzw. nach dem Offenheitssatz der Funktionentheorie (vgl. [RS02, Kapitel 8.5]) muss sogar die echte Ungleichung gelten, falls  $m$  nicht identisch einer reellen Konstanten ist.

Wenn  $m$  sowie  $n$  nichtkonstante Herglotzfunktionen sind, dann sind auch offensichtlich die Summe  $m + n$  und die Komposition  $m \circ n$  Herglotzfunktionen. Weitere Verknüpfungen werden wir im Verlauf untersuchen.

Der folgende Hauptsatz zeigt, dass es für jede Herglotzfunktion eine besondere Integraldarstellung gibt. Dies ist ein klassisches Ergebnis und bildet die Grundlage für alle weiteren Eigenschaften, die wir für Herglotzfunktionen beweisen möchten. Der Beweis dieser Darstellungsformel wird mit Hilfe des ersten Kapitels ausführlich ausgearbeitet. Wir werden dabei hauptsächlich Lebesgue-Stieltjes-Integrale und die Sätze von Helly verwenden.

**Theorem 2.2.** *Es sei  $m$  eine Herglotzfunktion. Dann existiert ein positives Borelmaß  $\omega$  auf  $\mathbb{R}$ , welches*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+s^2} d\omega(s) < \infty \quad (2.1)$$

*erfüllt und der Herglotzfunktion die folgende Darstellung verleiht*

$$m(z) = c + dz + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{s-z} - \frac{s}{1+s^2} \right) d\omega(s). \quad (2.2)$$

*Dabei ist  $c = \operatorname{Re} m(i)$  und  $d = \lim_{y \rightarrow \infty} m(iy)/(iy) \geq 0$ .*

*Beweis.* Wir folgen hier im Wesentlichen den Ideen des Beweises aus dem Klassiker [AG93], wobei wir allerdings manche Details deutlich genauer ausarbeiten werden.

Mit Hilfe einer Möbiustransformation bilden wir zuerst die obere Halbebene auf die Kreisscheibe ab, da wir dort die Schwarzsche Integralformel (vgl. Lemma A.5) verwenden können. Am Ende des Beweises werden wir diese Transformation wieder rückgängig machen.

Wir definieren mit Hilfe der Herglotzfunktion  $m$  eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf der offenen Kreisscheibe  $D := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$  durch:

$$f(\zeta) := \frac{1}{i} m \left( i \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right).$$

Diese ist demnach holomorph ist und erfüllt  $\operatorname{Re} f \geq 0$ .

Wir wählen nun  $z \in \mathbb{C}_+$  fest und zwar für den gesamten Beweis. Damit ist auch  $\zeta := (z-i)/(z+i) \in D$  als Element der Kreisscheibe fest gewählt. Es sei nun  $R < 1$  so groß gewählt, dass  $|\zeta| < R$  gilt, damit die Schwarzsche Integralformel (siehe Lemma A.5) angewendet werden kann:

$$f(\zeta) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} (f(Re^{it})) \frac{Re^{it} + \zeta}{Re^{it} - \zeta} dt.$$

Offensichtlich ist  $\alpha_R(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t \operatorname{Re} f(Re^{i\tau}) d\tau$  eine monoton wachsende Funktion auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$ , denn es gilt  $\operatorname{Re} f \geq 0$ . Somit existiert das zugeordnete Lebesgue-Stieltjes-Maß nach Definition 1.12. Da  $\alpha_R$  sogar stetig differenzierbar ist, ergibt Proposition 1.15 sofort:

$$f(\zeta) = i \operatorname{Im} f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + \zeta}{Re^{it} - \zeta} d\alpha_R(t).$$

Es sei nun  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $|\zeta| < R_n < 1$  und  $R_n \rightarrow 1$ . Dann ist jede analog definierte Funktion  $\alpha_{R_n}$  monoton wachsend und es gilt

$$0 \leq \alpha_{R_n}(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{it}) dt = \operatorname{Re} f(0).$$

Dies bedeutet, alle Funktionen bilden in die gleiche kompakte Menge ab, sodass nach Hellys Theorem 1.17 bzw. Korollar 1.18 eine Teilfolge  $(n_k)$  und eine monoton wachsende Funktion  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \operatorname{Re} f(0)]$  als punktwiser Grenzwert existiert.

Um nun Lemma 1.20 anwenden zu können, muss die gleichmäßige Konvergenz der Funktion

$$h_R(t) := \frac{Re^{it} + \zeta}{Re^{it} - \zeta}$$

für  $R \rightarrow 1$  nachgewiesen werden. Dies ist hingegen eine leichte Rechnung, welche

$$\|h_R - h_1\|_\infty \leq C(\zeta) \frac{1-R}{R-|\zeta|} \xrightarrow{R \rightarrow 1^-} 0$$

ergibt. Hierbei steht  $C(\zeta)$  für eine Konstante, die nur von  $\zeta \in D$  abhängt. Anwenden des Lemmas 1.20 führt zu:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= i \operatorname{Im} f(0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} h_{R_{n_k}}(t) d\alpha_{R_{n_k}}(t) \\ &= i \operatorname{Im} f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} d\alpha(t) \\ &= i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1+\zeta}{1-\zeta} [\alpha(2\pi) - \alpha(2\pi^-) + \alpha(0^+) - \alpha(0)] \\ &\quad + \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} d\alpha(t) \\ &=: i(-c) + \frac{1+\zeta}{1-\zeta} d + \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} d\alpha(t) \end{aligned}$$

Dabei wurden die Konstanten  $c$  und  $d$  folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} c &:= -\operatorname{Im} f(0) = \operatorname{Re} m(i), \\ d &:= \alpha(2\pi) - \alpha(2\pi^-) + \alpha(0^+) - \alpha(0). \end{aligned}$$

Nun möchten wir natürlich wieder zurück auf die ursprüngliche Herglotzfunktion  $m$ , sodass wir nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} m(z) &= c + dz + i \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it} + \frac{z-i}{z+i}}{e^{it} - \frac{z-i}{z+i}} d\alpha(t) \\ &= c + dz + \int_{(0,2\pi)} \frac{z \cot(t/2) - 1}{z + \cot(t/2)} d\alpha(t) \end{aligned}$$

erhalten. Nun können wir die Substitutionsregel für Lebesgue-Integrale anwenden, vgl. Theorem 1.16. Durch  $\beta(t) := \alpha(2\arccot(-t))$  erhalten wir eine monotone Funktion und somit auch das zugehörige Stieltjesmaß  $\mu_\beta$ . Setzen wir  $f(t) = 2\arccot(-t)$ , so gilt  $\mu_\alpha = f_*\mu_\beta$  und damit

$$\int_{(0,2\pi)} \frac{z \cot(t/2) - 1}{z + \cot(t/2)} d(f_*\mu_\beta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-zs - 1}{z - s} d\mu_\beta(s).$$

Somit gilt schließlich:

$$m(z) = c + dz + \int_{\mathbb{R}} \frac{zs + 1}{s - z} d\beta(s). \quad (2.3)$$

Auch die Darstellungsformel in dieser Form mit einem endlichen Borelmaß wird oft genutzt. Wir setzen indessen  $d\omega := (1 + s^2)d\beta$  und erhalten nach einer Partialbruchzerlegung das endgültige Ergebnis:

$$m(z) = c + dz + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{s - z} - \frac{s}{1 + s^2} \right) d\omega(s).$$

Nach der Herleitung ist  $c = \operatorname{Re} m(i)$  und  $d \geq 0$ . Aus der Darstellungsformel folgt darüber hinaus auch direkt  $d = \lim_{y \rightarrow \infty} m(iy)/(iy)$ .  $\square$

Im oben genannten Theorem gilt offensichtlich auch die Umkehrung, d. h. eine Funktion von der Form (2.2) ist für  $d \geq 0$  immer eine Herglotzfunktion. Das folgende Theorem zeigt, wie man das Maß  $\omega$  direkt aus den Werten der Herglotzfunktion erhalten kann.

**Theorem 2.3.** *Ist  $m$  eine Herglotzfunktion, so gilt für das positive Borelmaß  $\omega$  aus Theorem 2.2 und für  $(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$  folgende Inversionsformel:*

$$\frac{1}{2}\omega(\{t_1\}) + \frac{1}{2}\omega(\{t_2\}) + \omega((t_1, t_2)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) dx. \quad (2.4)$$

*Beweis.* Wir verwenden die Darstellungsformel (2.2) für die Herglotzfunktion  $m$  und berechnen den Imaginärteil letzterer durch:

$$\operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = d\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{t - x - i\varepsilon} \right) d\omega(t).$$

Da dieser Imaginärteil per definitionem nicht negativ sein darf, können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{s - x - i\varepsilon} \right) dx \right) d\omega(s) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left[ \arctan \left( \frac{1}{\varepsilon}(t_2 - s) \right) - \arctan \left( \frac{1}{\varepsilon}(t_1 - s) \right) \right] d\omega(s). \end{aligned}$$

Wir können das Integrationsgebiet nun geschickt aufteilen in

$$\mathbb{R} = (-\infty, t_1) \cup \{t_1\} \cup (t_1, t_2) \cup \{t_2\} \cup (t_2, \infty)$$

und für jedes einzelne Integral den Satz von Lebesgue verwenden. Dabei nutzen wir folgende Tatsache

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctan \left( \frac{1}{\varepsilon}(t - s) \right) = \begin{cases} \pi/2 & , t > s \\ 0 & , t = s \\ -\pi/2 & , t < s \end{cases}$$

und erhalten somit die Umkehrformel (2.4).  $\square$

Manchmal ist es praktisch anstatt des Radonmaßes  $\omega$  eine monotone Funktion  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  anzugeben und die Darstellungsformel aus Theorem 2.2 als Lebesgue-Stieltjes-Integral zu formulieren. Da diese Funktion, wie in Kapitel 1 beschrieben, nicht eindeutig bestimmt ist, müssen wir Sie normieren. Als nützlich erweist sich folgende Konvention:

$$W(x) := \begin{cases} +\frac{1}{2} [\omega((0, x]) + \omega([0, x))], & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} [\omega((x, 0]) + \omega([x, 0))], & x < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Somit ist das entsprechende Lebesgue-Stieltjes-Maß durch  $\mu_W = \omega$  gegeben und es gilt neben  $W(0) = 0$  vor allem folgende Normierung:

$$W(x) = \frac{1}{2} (W(x^+) + W(x^-)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Diese Definition erzeugt also eine Funktion, die an Unstetigkeitsstellen genau den Mittelwert aus rechtseitigem und linksseitigem Grenzwert annimmt. Die Umkehrformel aus Theorem 2.3 hat in dieser Formulierung folgende kompakte Form:

$$W(t_2) - W(t_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) dx. \quad (2.7)$$

Eine schöne Sammlung von Beispielen und Anwendungen von skalaren Herglotzfunktionen findet man in [GT00]. Wir zeigen hier nur ein einfaches Beispiel und demonstrieren die Nützlichkeit der obigen Umkehrformel (2.7).

**Beispiel 2.4.** Wir nehmen  $m(z) = i$  als wohldefinierte Herglotzfunktion und berechnen die Funktion  $W$  nach der Umkehrformel

$$W(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_0^t \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) dx = \frac{t}{\pi} \quad (2.8)$$

und damit gilt für das Borelmaß  $d\omega = d\lambda/\pi$ . Daraus leiten wir die Identität

$$i = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{x - z} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx \quad (2.9)$$

ab, welche man ebenfalls leicht durch den Residuensatz erhält.

Laut Greenstein [Gre60] lässt sich mit der Funktion  $W$  besonders einfach die analytische Fortsetzung der Herglotzfunktion in die untere Halbebene angeben:

**Theorem 2.5.** *Es sei  $m$  eine Herglotzfunktion mit dem zugeordnetem Borelmaß  $\omega$  aus Theorem 2.2,  $W$  die durch (2.5) definierte Funktion und  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann ist  $m$  genau dann durch  $(a, b)$  in ein Gebiet der unteren Halbebene,  $D_- \subseteq \mathbb{C}_-$ , holomorph fortsetzbar, wenn  $W|_{(a,b)}$  analytisch ist.*

*In diesem Falle gilt*

$$m(z) = \overline{m(\bar{z})} + 2\pi i W'(z) \quad \text{für } z \in D_- \subseteq \mathbb{C}_-, \quad (2.10)$$

wobei  $W'$  die analytische Fortsetzung von  $W'|_{(a,b)}$  in das Gebiet  $D_-$  ist.

*Beweis.* Siehe [Gre60, Chapter III].  $\square$

Im nächsten Theorem beschreiben wir eine bestimmte Klasse von Herglotzfunktionen, welche vor allem in Anwendungen häufig auftreten. Auch in dieser Arbeit spielen diese Herglotzfunktionen die wichtigste Rolle. Sie zeichnen sich durch eine vereinfachte Darstellungsformel aus, die wir nun beweisen möchten.

**Theorem 2.6.** *Ist  $m$  eine Herglotzfunktion mit  $\sup_{z \in \mathbb{C}_+} |m(z)\text{Im}(z)| =: M < \infty$ , so gibt es genau ein Borelmaß  $\omega$  auf  $\mathbb{R}$ , welches*

$$\int_{\mathbb{R}} d\omega \leq M < \infty \quad (2.11)$$

*erfüllt und der Herglotzfunktion folgende Darstellung vergibt:*

$$m(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\omega(t). \quad (2.12)$$

*Beweis.* Auch hier stammen die Ideen des Beweises aus [AG93], welche wir hier ausformulieren möchten. Mit der Darstellungsformel aus Theorem 2.2 gibt es ein Borelmaß  $\omega$  mit

$$m(z) = c + dz + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\omega(t), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Da nun  $m(i\eta)/(i\eta) = \eta m(i\eta)/(i\eta^2) \rightarrow 0$  für  $\eta \rightarrow \infty$  nach der Voraussetzung an die Herglotzfunktion gilt, verschwindet die Konstante  $d$ .

Weiterhin folgt aus der genannten Voraussetzung, dass ein  $M > 0$  existiert mit

$$M \geq \eta |m(i\eta)| = \left| \eta c + \eta \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{t-i\eta} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\omega(t) \right| =: |A(\eta)| \quad (2.13)$$

für alle  $\eta > 0$ . Wir kürzen den Ausdruck innerhalb des Betrages mit  $A(\eta)$  ab. Die Ungleichung (2.13) gilt dann auch für den Imaginärteil von  $A(\eta)$  und liefert uns sofort

$$\text{Im } A(\eta) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\eta^2}{t^2 + \eta^2} \right) d\omega(t) \leq M.$$

Im Grenzwert  $\eta \rightarrow \infty$  zeigt der Satz von der monotonen Konvergenz schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} d\omega \leq M.$$

Andererseits zeigt der Realteil von  $A(\eta)$  ebenfalls mit der Betrachtung der Ungleichung (2.13) im Grenzwert  $\eta \rightarrow \infty$ , dass

$$c = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{t^2 + \eta^2} \right) d\omega(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{1+t^2} d\omega(t).$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, da die Konstante 1 eine  $\omega$ -integrierbare Funktion ist. Beachte dabei, dass für  $\eta > 1$  und  $t \in \mathbb{R}$  beliebig

$$\left( t - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{4} - \eta^2 \Rightarrow \frac{t}{t^2 + \eta^2} \leq 1$$

gilt.

Setzen wir nun diese Form von  $c$  in die übliche Darstellungsformel ein, so erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Wichtige Beispiele solcher Herglotzfunktionen, findet man durch selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen, die sich in den weiteren Kapiteln als sehr wichtig erweisen werden.

**Beispiel 2.7.** Es sei  $\mathfrak{H}$  ein komplexer Hilbertraum und  $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert. Dann ist für alle  $x \in \mathfrak{H}$  die Funktion  $m_x(z) := \langle x, (T - z)^{-1}x \rangle$  eine skalare Herglotzfunktion mit  $\sup_{z \in \mathbb{C}_+} |m_x(z) \operatorname{Im}(z)| < \infty$ .

*Beweis.* Wir nehmen ohne Einschränkung  $x \neq 0$  an. Dass  $m_x$  eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}^+$  ist, folgt aus der Analytizität der Resolventenabbildung. Setzen wir für ein  $z \in \mathbb{C}^+$  zur Abkürzung  $y = (T - z)^{-1}x$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} m_x(z) &= \operatorname{Im} \langle (T - z)y, y \rangle = \operatorname{Im} \langle Ty, y \rangle + \operatorname{Im} [-\bar{z} \langle y, y \rangle] \\ &= 0 + \|y\|^2 \operatorname{Im} z > 0. \end{aligned}$$

Die Operatornorm der Resolventen erfüllt immer  $\|(T - z)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}$  und aus dieser Eigenschaft folgt direkt

$$|m_x(z) \operatorname{Im}(z)| = |\operatorname{Im}(z)| |\langle x, (T - z)^{-1}x \rangle| \leq \|x\|^2,$$

sodass alles gezeigt ist.  $\square$

Wie in der allgemeinen Darstellungsformel gilt auch für Theorem 2.6 die Umkehrung, was wir im folgenden Satz festhalten möchten:

**Satz 2.8.** Für jedes endliche Borelmaß  $\omega$  ist die Funktion, auch häufig als Boreltransformation von  $\omega$  bezeichnet,

$$m_\omega(z) := \int \frac{1}{t - z} d\omega(t) \quad (2.14)$$

eine Herglotzfunktion mit  $\sup_{z \in \mathbb{C}_+} |m_\omega(z) \operatorname{Im}(z)| \leq \omega(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Wir verweisen auf [Tes09, Theorem 3.10].  $\square$

Nun werden wir betrachten, inwiefern die Ableitung des Borelmaßes  $\omega$  bezüglich des Lebesguemaßes, was wir mit  $D\omega$  abkürzen wollen, mit den Werten der Herglotzfunktion in Beziehung steht. Wenn wir  $f. \ddot{u}.$  schreiben, so ist dies immer bezüglich des Lebesguemaßes auf der Borelschen Sigma-Algebra gemeint.

**Theorem 2.9.** Es sei  $m$  eine Herglotzfunktion und  $\omega$  das zugeordnete Maß. Dann gilt

$$(\underline{D}\omega)(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) \leq (\overline{D}\omega)(x). \quad (2.15)$$

Inbesondere existiert der Grenzwert  $f. \ddot{u}.$  und es gilt

$$(D\omega)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) \quad (2.16)$$

für alle Stellen, an denen  $D\omega$  existiert.

*Beweis.* In diesen Beweis fließen Ideen aus [Tes09] ein. Es seien  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt. Die Herglotzfunktion sei durch die Darstellungsformel aus Theorem 2.2 gegeben und somit gilt für den Imaginärteil

$$\operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = d\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2 + \varepsilon^2} d\omega(t).$$

Definieren wir nun zur Abkürzung  $K_\varepsilon(t) := \varepsilon/(t^2 + \varepsilon^2)$ , so können wir für ein beliebiges aber festes  $\delta > 0$  das Integral aufteilen

$$\operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = d\varepsilon + \int_{\mathbb{R} \setminus I_\delta} K_\varepsilon(t-x) d\omega(t) + \int_{I_\delta} K_\varepsilon(t-x) d\omega(t),$$

wobei  $I_\delta := (x - \delta, x + \delta)$ . Die ersten beiden Summanden verschwinden in der Grenzwertbetrachtung  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , denn für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt mit dem endlichen Maß  $d\beta(t) := d\omega(t)/(t^2 + 1)$  Folgendes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus I_\delta} K_\varepsilon(t-x) d\omega(t) &= \int_{\mathbb{R} \setminus I_\delta} K_\varepsilon(t-x)(t^2 + 1) d\beta(t) \\ &\leq K_\varepsilon(\delta)((x + \delta)^2 + 1)\beta(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Für die Berechnung des letzten Summanden wählen wir für ein beliebiges  $\delta > 0$  zwei Konstanten  $c_\delta, C_\delta \in [-\infty, \infty]$  derart, dass sowohl

$$c_\delta \leq \frac{\omega(I_s)}{2s} \leq C_\delta \quad \text{für alle } s \in (0, \delta)$$

als auch

$$c_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} (\underline{D}\omega)(x) \quad \text{und} \quad C_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} (\overline{D}\omega)(x) \quad (2.17)$$

gilt. Desweiteren benutzen wir die Ideen aus [Tes09] und berechnen für die Menge

$$M := \{(s, t) \mid t \in I_s, s \in (0, \delta)\} = \{(s, t) \mid t \in I_\delta, s \in (t-x, \delta)\}$$

das Integral

$$\int_M K'_\varepsilon(s) ds d\omega(t)$$

nach Fubini auf zwei verschiedene Weisen. Wir erhalten

$$\int_0^\delta K'_\varepsilon(s)\omega(I_s) ds = \int_M K'_\varepsilon(s) ds d\omega(t) = \int_{I_\delta} (K_\varepsilon(\delta) - K_\varepsilon(t-x)) d\omega(t)$$

und damit

$$\int_{I_\delta} K_\varepsilon(t-x) d\omega(t) = K_\varepsilon(\delta)\omega(I_\delta) - \int_0^\delta K'_\varepsilon(s)\omega(I_s) ds.$$

Verwenden wir nun  $2s c_\delta \leq \omega(I_s) \leq 2s C_\delta$  für alle  $0 \leq s \leq \delta$ , und

$$\int_0^\delta (-sK'_\varepsilon(s)) ds = -\delta K_\varepsilon(\delta) + \arctan(\delta/\varepsilon),$$

was aus einer elementaren Rechnung folgt, so erhalten wir

$$2c_\delta \arctan(\delta/\varepsilon) \leq \int_{I_\delta} K_\varepsilon(t-x) d\omega(t) \leq 2C_\delta \arctan(\delta/\varepsilon).$$

Betrachten wir diese Gleichung im Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , so ergibt dies

$$c_\delta \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) \leq C_\delta$$

und die Behauptung folgt aus (2.17). Dass der Grenzwert fast überall existiert folgt sofort aus Satz 1.44.  $\square$

Das vorherige Theorem zeigt, wie die Ableitung des Maßes und die Randwerte der Herglotzfunktion zusammenhängen. Für die Randwerte gilt sogar folgender allgemeiner und wichtiger Satz:

**Satz 2.10.** *Für eine Herglotzfunktion  $m$  existiert der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m(x + i\varepsilon)$  f. ü. für  $x \in \mathbb{R}$  und ist ebenfalls f. ü. endlich.*

*Gibt es eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  mit positivem Lebesguemaß und der Eigenschaft, dass der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m(x + i\varepsilon) = 0$  für alle  $x \in A$  verschwindet, so muss  $m \equiv 0$  gelten.*

*Beweis.* Aus Theorem 2.9 folgt direkt, dass der Imaginärteil des Grenzwertes der Herglotzfunktion f. ü. endlich existiert. Dass Gleiches für den Realteil gilt, ist eine leichte Argumentation mit der Quadratwurzel. Siehe [Tes09, Corollary 3.24].

Die zweite Aussage ist ein Spezialfall der sogenannten *Luzin-Privalow Theoreme* und man findet sie in [Pri56].  $\square$

Wir können sogar zeigen, wie schnell der Grenzwert für den Realteil am Rand höchstens nach Unendlich anwachsen kann.

**Satz 2.11.** *Ist  $m$  eine Herglotzfunktion und  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt immer*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Re} m(x + i\varepsilon) = 0. \quad (2.18)$$

*Insbesondere gilt im Falle der Existenz der Grenzwerte*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon m(x + i\varepsilon). \quad (2.19)$$

*Beweis.* Es sei  $\delta > 0$  beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\varepsilon \operatorname{Re} m(x + i\varepsilon) = \varepsilon(c + dx) + \varepsilon \int_{\mathbb{R} \setminus I_\delta} H_\varepsilon(s) d\omega(s) + \varepsilon \int_{I_\delta} H_\varepsilon(s) d\omega(s) \quad (2.20)$$

mit

$$H_\varepsilon(s) = \frac{s-x}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} - \frac{s}{1+s^2}.$$

Hier ist das Intervall  $I_\delta := (x-\delta, x+\delta)$  wie im Beweis von Theorem 2.9 gewählt. Die ersten beiden Terme in (2.20) sind wieder ungefährlich, da für ein genügend kleines  $\varepsilon > 0$  und mit dem endlichem Maß  $d\beta = (1+s^2)d\omega$  Folgendes gilt:

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R} \setminus I_\delta} H_\varepsilon d\omega = \varepsilon \int_{\mathbb{R} \setminus I_\delta} \frac{(s-x)(xs+1) - \varepsilon^2 s}{(s-x)^2 + \varepsilon^2} d\beta(s) \leq \varepsilon C_\delta \beta(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Dabei ist  $C_\delta := (\delta - x)(x\delta + 1)/(\delta - x)^2$  die Abschätzung des beschränkten Integranden.

Für den dritten Term beachte man die elementare Rechnung, dass aus  $(x \pm 1)^2 \geq 0$  folgt, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Damit lässt sich nun Folgendes berechnen:

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \int_{I_\delta} H_\varepsilon(s) d\omega(s) \right| &\leq \int_{I_\delta \setminus \{x\}} \left| \frac{(s-x)/\varepsilon}{((s-x)/\varepsilon)^2 + 1} \right| d\omega(s) + \varepsilon \int_{I_\delta} \left| \frac{s}{1+s^2} \right| d\omega(s) \\ &\leq \int_{I_\delta \setminus \{x\}} \frac{1}{2} d\omega(s) + \varepsilon \int_{I_\delta} \left| \frac{s}{1+s^2} \right| d\omega(s) \\ &\leq \frac{1}{2} [\omega((x-\delta, x)) + \omega((x, x+\delta))] + \varepsilon \int_{I_\delta} \left| \frac{s}{1+s^2} \right| d\omega(s). \end{aligned}$$

Wir erhalten demnach insgesamt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\varepsilon \operatorname{Re} m(x + i\varepsilon)| \leq \frac{1}{2} [\omega((x-\delta, x)) + \omega((x, x+\delta))]$$

für jedes  $\delta > 0$ . Aufgrund der  $\emptyset$ -Stetigkeit von  $\omega$  folgt somit die Behauptung.  $\square$

Der Realteil einer Herglotzfunktion wächst bei Annäherung an die reelle Achse folglich langsamer als linear an. Für den Imaginärteil gilt dies im Allgemeinen nicht. Wir werden nun zeigen, dass das Wachstumsverhalten des Imaginärteils der Herglotzfunktion direkt mit den Atomen des zugeordneten Borelmaßes  $\omega$  zusammenhängt.

**Satz 2.12.** *Ist  $m$  eine Herglotzfunktion und  $\omega$  das zugeordnete Borelmaß, so gilt für ein  $x \in \mathbb{R}$  immer*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = \omega(\{x\}). \quad (2.21)$$

*Beweis.* Beachte, dass nach dem Beweis von Theorem 2.9 für jedes genügend kleine  $\delta > 0$  Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2 + \varepsilon^2} d\omega(t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{I_\delta \setminus \{x\}} \frac{1}{\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right)^2 + 1} d\omega(t) + \int_{\{x\}} d\omega(t) = 0 + \omega(\{x\}). \end{aligned}$$

Hier wurde der Satz von Lebesgue mit der Majorante 1 verwendet.  $\square$

Wir halten nun fest, dass die Atome von  $\omega$  durch die Betrachtung der Randwerte der Herglotzfunktion erhalten werden können. Das nächste Kapitel zeigt, wie sich dieses Prinzip auch auf die anderen Anteile des Maßes ausdehnen lässt.

## 2.2. Minimale Träger bei skalaren Herglotzfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir das zu einer Herglotzfunktion zugeordnete Borelmaß  $\omega$  nach dem Lebesgueschen Zerlegungssatz in

$$\omega = \omega_{ac} + \omega_s = \omega_{ac} + \omega_{sc} + \omega_{pp} \quad (2.22)$$

unterteilen. Das heißt, wir zerlegen das Maß in einen absolut stetigen Anteil und einen singulären Anteil, wobei letzterer nochmals in den singulär stetigen und einen rein atomaren Teil aufgeteilt wird. Man interessiert sich nun jeweils für minimale Träger dieser Maße und wie man sie aus den Randwerten der Herglotzfunktion berechnen kann.

**Theorem 2.13.** *Es sei  $m$  eine Herglotzfunktion und  $\omega$  das zugeordnete Borelmaß nach Theorem 2.2. Dann ist*

$$S_{ac} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) \in (0, \infty) \right\} \quad (2.23)$$

ein minimaler Träger des absolut stetigen Anteils  $\omega_{ac}$  und

$$S_s := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = \infty \right\} \quad (2.24)$$

ein minimaler Träger des singulären Anteils  $\omega_s$ . Diesen kann man weiterhin unterteilen: Die Menge

$$S_{sc} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = \infty, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = 0 \right\} \quad (2.25)$$

ist ein minimaler Träger des singulär stetigen Maßes  $\omega_{sc}$  und die Menge

$$S_{pp} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon m(x + i\varepsilon) > 0 \right\} \quad (2.26)$$

ist ein kleinster Träger für das rein atomare Maß  $\omega_{pp}$ .

*Beweis.* Alle Darstellungen folgen aus dem Theorem 1.45, welches minimale Träger mit der Ableitung des Maßes verknüpft, in Kombination mit Theorem 2.9. Somit sind die Darstellungen der minimalen Träger  $S_{ac}$  und  $S_s$  direkt bewiesen.

Für den Beweis von  $S_{sc}$  benutzen wir Satz 2.12 und wissen, dass  $\omega(\{x\}) > 0$  genau dann gilt, wenn  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon) > 0$  ist.

Daraus folgt auch unmittelbar die Darstellung für  $S_{pp}$ , wobei man ebenfalls den Satz 2.11 beachten sollte.  $\square$

Da der Grenzwert zur reellen Achse, wie wir gesehen haben, eine sehr wichtige Rolle spielt, gibt es in der Literatur verschiedene Abkürzungen. Wir werden manchmal zur besseren Übersichtlichkeit die Abkürzungen

$$m^+(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m(x + i\varepsilon),$$

und  $\operatorname{Im} m^+(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} m(x + i\varepsilon),$

verwenden, wenn diese Grenzwerte existieren und damit endlich oder unendlich sind.

Das folgende Theorem verallgemeinert ein Resultat von D. J. Gilbert aus [Gil89] und zeigt, wie man einen minimalen Träger von  $\omega_s$  für eine zusammengesetzte Herglotzfunktion bestimmt.

**Theorem 2.14.** *Es seien  $m_a, m_b : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  Herglotzfunktionen, von denen mindestens eine nicht konstant ist, und  $c \geq 0$  eine reelle Zahl. Dann ist*

$$M(z) = \frac{m_a(z)m_b(z) - c}{m_a(z) + m_b(z)} \quad (2.27)$$

eine Herglotzfunktion.

Es sei  $\omega$  das zu  $M$  gehörige Borelmaß aus Theorem 2.2. Dann gilt im Falle  $c > 0$ , dass die Menge

$$\tilde{S}_s := S_0 \cup S_\infty \quad \text{mit}$$

$$S_0 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -m_a^+(x) = m_b^+(x) < \infty \right\}$$

$$S_\infty := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |m_a^+(x)| = |m_b^+(x)| = \infty \right\}$$

ein minimaler Träger des singulären Anteils von  $\omega$  ist.

*Beweis.* Dass  $M$  eine Herglotzfunktion darstellt, ist eine einfache Rechnung, die wir kurz vorführen möchten. Da  $M$  aus holomorphen Funktionen zusammengesetzt und der Nenner nach Voraussetzung nullstellenfrei ist, bleibt nur  $\text{Im } M(z) \geq 0$  zu zeigen:

$$\begin{aligned} \text{Im } M &= \text{Im} \frac{m_a m_b - c}{m_a + m_b} \\ &= \frac{1}{|m_a + m_b|^2} \text{Im} \left( m_a |m_b|^2 + m_b |m_a|^2 - c \overline{m_a} - c \overline{m_b} \right) \\ &= \frac{1}{|m_a + m_b|^2} \left[ (|m_b|^2 + c) \text{Im } m_a + (|m_a|^2 + c) \text{Im } m_b \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Aus Theorem 2.13 und Satz 2.10 folgt, dass sowohl

$$S_s^I := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{Im } M^+(x) = \infty \right\}$$

als auch

$$S_s^{II} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |M^+(x)| = \infty \right\}$$

minimale Träger von  $\omega_s$  sind.

Es sei nun  $x \in S_0$  gewählt. Dann gilt für ein  $c > 0$ :

$$(m_a m_b - c) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -((m_b^+)^2 + c) \neq 0$$

und somit  $|M^+(x)| = \infty$  und dies bedeutet  $x \in S_s^{II}$ .

Es sei nun andererseits  $x \in S_\infty$ . Dann folgt leicht mit der Dreiecksungleichung

$$|M(x + i\varepsilon)| \geq \frac{\left| 1 - \frac{c}{m_a(x+i\varepsilon)m_b(x+i\varepsilon)} \right|}{\frac{1}{|m_a(x+i\varepsilon)|} + \frac{1}{|m_b(x+i\varepsilon)|}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty,$$

da der Nenner gegen 0 konvergiert. Demnach ist ebenfalls  $x \in S_s^{\parallel}$ .

Es nun  $x \in S_s^I$ . So erkennt man aus der Betrachtung des Imaginärteils

$$\operatorname{Im} M = \frac{1}{|m_a + m_b|^2} \left[ (|m_b|^2 + c) \operatorname{Im} m_a + (|m_a|^2 + c) \operatorname{Im} m_b \right],$$

dass entweder  $x \in S_0$  oder  $x \in S_\infty$  gelten muss.

Ingesamt haben wir nun

$$S_s^{\parallel} \supseteq \tilde{S}_s \supseteq S_s^I$$

gezeigt, sodass  $\tilde{S}_s$  ebenfalls ein minimaler Träger von  $\omega_s$  ist.  $\square$

Das Theorem zeigt also insbesondere, dass wann immer  $m$  eine nichtverschwindende Herglotzfunktion ist, dann  $-1/m$  ebenso eine ist. Diese Konstruktion von Herglotzfunktionen aus bereits bekannten ist hingegen nur ein Spezialfall eines Satzes, den man z. B. in [GT00] findet:

**Satz 2.15.** *Es sei  $m$  eine nichtkonstante Herglotzfunktion und  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  eine Matrix, für die gilt:*

$$A^* J_1 A = J_1 \quad \text{mit} \quad J_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Dann ist auch

$$m_A(z) := \frac{a_{21} + a_{22}m(z)}{a_{11} + a_{12}m(z)} \quad (2.29)$$

eine Herglotzfunktion.

*Beweis.* Dies kann man elementar nachrechnen, was wir kurz skizzieren möchten:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} m_A &= \frac{1}{|a_{11} + a_{12}|^2} \operatorname{Im} \left[ \overline{a_{11}} a_{21} + \overline{a_{12}} a_{21} \overline{m} + \overline{a_{11}} a_{22} m + \overline{a_{12}} a_{22} |m|^2 \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{|a_{11} + a_{12}|^2} \operatorname{Im} \left[ \overline{(\overline{a_{11}} a_{22} m)} + (\overline{a_{11}} a_{22} m) - \overline{m} \right] \\ &= \frac{1}{|a_{11} + a_{12}|^2} \operatorname{Im} m \geq 0. \end{aligned}$$

Im Schritt (\*) verwendet man die Bedingung, die  $A^* J_1 A = J_1$  an die Koeffizienten von  $A$  stellt.  $\square$

Ähnlich wie in Theorem 2.14 kann man auch minimale Träger für die oben konstruierte Herglotzfunktion  $m_A$  in Bezug auf die Matrix  $A$  und die ursprüngliche Herglotzfunktion  $m$  charakterisieren. Wir verweisen auf die sehr gute Darstellung in [GT00, Theorem 3.2]. Man erhält zum Beispiel die Aussage, dass die absolut stetigen Anteile des zu  $m$  und des zu  $m_A$  gehörigen Borelmaßes äquivalente Maße sind, und zwar für alle Matrizen  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  mit Eigenschaft (2.28).

Diese Ergebnisse finden eine direkte Anwendung in der Störungstheorie von selbstadjungierten Operatoren in Hilberträumen und wir werden in Kapitel 3 in Bezug auf die sogenannte Aronszajn-Donoghue-Theorie darauf zurückkommen.

### 2.3. Matrixanalysis

Der nächste Abschnitt wird sich mit matrixwertigen Herglotzfunktionen beschäftigen. Aufgrund dessen werden hier wichtige und nützliche Eigenschaften von quadratischen und insbesondere positiv semidefiniten Matrizen wiederholt. Wir verwenden hauptsächlich [HJ85].

Es werden die üblichen Schreibweisen für Matrizen verwendet. Den komplexen Hilbertraum der  $n \times n$ -Matrizen mit komplexwertigen Einträgen, bezeichnen wir einfach mit  $\mathbb{C}^{n \times n}$  und  $(\cdot | \cdot)$  steht für das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$ , welches linear im zweiten Argument ist. Mit  $A^*$  bezeichnen wir die transponierte Matrix von  $A$  mit komplex konjugierten Einträgen. Unter dem Imaginärteil von  $A$  verstehen wir  $\text{Im } A := (A - A^*)/(2i)$  und unter dem Realteil  $\text{Re } A := (A + A^*)/2$ .

**Definition 2.16.** Wir nennen eine Matrix  $A$  *positiv semidefinit*, wenn  $(u | Au) \geq 0$  für alle  $u \in \mathbb{C}^n$  gilt, was wir mit  $A \geq 0$  abkürzen. Analog nennen wir die Matrix *positiv definit*, wenn die echte Ungleichung gilt und schreiben dann  $A > 0$ .

Weiterhin nennt man eine Matrix  $A$  *negativ semidefinit* bzw. *negativ definit*, wenn die Matrix  $-A$  positiv semidefinit bzw. positiv definit ist.

Trifft auf eine Matrix keine dieser Definitionen zu, so heißt sie *indefinit*.

Wir möchten auf folgenden leicht zu beweisenden Satz hinweisen.

**Satz 2.17.** Eine positive (semi)definite Matrix auf  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist hermitesch.

Betrachtet man den reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ , so gilt der oben stehende Satz für Matrizen  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dagegen nicht. Das heißt, es gibt reelle Matrizen  $A$ , die nicht symmetrisch sind, aber  $(u | Au) \geq 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^n$  erfüllen. Aus diesem Grund wird oft, zur Vereinheitlichung des komplexen und des reellen Falls, die Hermitizität bzw. Symmetrie mit in die Definition von positiv (semi)definiten Matrizen hinzugenommen. Man vergleiche dazu auch [HJ85, Chapter 7].

Das folgende Lemma hält eine wichtige Abschätzung für die Einträge von positiv definiten Matrizen bereit. Siehe auch [GT00, Lemma 5.1].

**Lemma 2.18.** Es sei  $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine positiv semidefinite Matrix.

(a) Für jedes  $1 \leq j, k \leq n$  gilt

$$|a_{jk}|^2 \leq a_{jj}a_{kk} \leq \frac{1}{4}(a_{jj} + a_{kk})^2. \quad (2.30)$$

Insbesondere impliziert die Eigenschaft  $a_{kk} = 0$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ , dass die gesamten Einträge der  $k$ -ten Spalte und Zeile verschwinden.

(b) Für ein  $u \in \mathbb{C}^n$  mit  $(u | Au) = 0$  gilt  $u \in \text{Kern } A$ .

*Beweis.* (a) Die erste Ungleichung folgt aus der Cholesky-Zerlegung von positiv semidefiniten Matrizen (vgl. [HJ85, Chapter 7]), d.h. es existiert ein  $B \geq 0$  mit  $A = B^*B$ . Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$|a_{jk}|^2 \leq \|Be_j\|^2 \|Be_k\|^2 = a_{jj}a_{kk}.$$

Die zweite Ungleichung ist die übliche Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.

(b) Dies folgt ebenfalls aus der Cholesky-Zerlegung  $A = B^*B$ , denn nach der Voraussetzung gilt  $(Bu|Bu) = 0$  und daraus folgt  $Bu = 0$ . Dies bedeutet aber  $u \in \text{Kern } A$ .  $\square$

Die obige Aussage wenden wir nun auf matrixwertige Borelmaße an, welche aus Kapitel 1 bekannt sind und im nächsten Abschnitt noch genauer untersucht werden.

**Satz 2.19.** *Es sei  $\Omega$  ein verallgemeinertes matrixwertiges Maß auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  mit der Eigenschaft, dass  $\mathbb{C}^{n \times n} \ni \Omega(K) \geq 0$  für jede beschränkte Borelmenge  $K \subseteq \mathbb{R}$  gilt.*

*Dann ist durch*

$$\omega(K) := \text{tr}(\Omega(K)), \quad K \subseteq \mathbb{R} \text{ beschränkt} \quad (2.31)$$

*ein positives Borelmaß  $\omega$  auf  $\mathbb{R}$  definiert, welches äquivalent zu  $\Omega$  ist, d. h. für eine Borelmenge  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  gilt:*

$$\omega(\Delta) = 0 \iff \Omega(\Delta) = 0. \quad (2.32)$$

*Beweis.* Aufgrund der positiven Semidefinitheit erfüllt für jedes  $j = 1, \dots, n$  das Diagonalelement  $\Omega_{jj}(K) \geq 0$  für eine beschränkte Borelmenge  $K \subseteq \mathbb{R}$ , sodass  $\Omega_{jj}$  ein positives Borelmaß definiert. Demnach ist auch die Summe aller Diagonalelemente ein positives Maß. Man beachte in diesem Zusammenhang den Fortsetzungssatz von Carathéodory (siehe Satz A.7).

Offensichtlich gilt  $\omega \ll \Omega$ . Für die Umkehrung nehme man eine Borelmenge  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  mit  $\omega(\Delta) = 0$ . Dann gilt auch  $\Omega_{jj}(\Delta) = 0$  für jedes  $1 \leq j \leq n$ . Nach Lemma 2.18 gilt nun

$$2|\Omega_{jk}(\Delta)| \leq \Omega_{jj}(\Delta) + \Omega_{kk}(\Delta) = 0, \quad (2.33)$$

sodass  $\Omega(\Delta)$  identisch verschwindet. Somit gilt auch  $\Omega \ll \omega$ .  $\square$

Der obige Satz ist ein nützliches Hilfsmittel um eine große Klasse von operatorwertigen Maßen zu untersuchen, da man durch Spurbildung auf die bekannte Theorie der positiven Maße zurückgreifen kann.

## 2.4. Matrixwertige Herglotzfunktionen

Dieser Abschnitt handelt von der Verallgemeinerung der zu Beginn des Kapitels 2 eingeführten Herglotzfunktionen auf matrixwertige Funktionen, die auf der oberen Halbebene definiert sind. Wir werden auch in diesem Fall Darstellungsformeln und Umkehrformeln formulieren. Wie in der vorherigen Abschnitten steht  $\mathbb{C}_+$  für die offene obere Halbebene und  $\mathbb{C}_-$  für die untere. Wir verwenden hier größtenteils [GT00].

**Definition 2.20.** Eine Abbildung  $M : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt eine *matrixwertige Herglotzfunktion* oder auch kurz *Herglotzmatrix*, wenn gilt:

- (a)  $z \mapsto M(z)$  ist analytisch auf  $\mathbb{C}_+$ ,

(b)  $\operatorname{Im} M(z) \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}_+$ .

Die Definition schließt somit auch den skalaren Fall ein, andererseits greift nun nicht mehr das Argument der Funktionentheorie, dass es keine Nullstelle des Imaginärteils geben kann, wenn die Herglotzfunktion nicht konstant ist. Das nächste Lemma, welches aus [GT00] stammt, erklärt welchen Einschränkungen der Kern im matrixwertigen Fall unterliegt.

**Lemma 2.21.** *Es sei  $M$  eine matrixwertige Herglotzfunktion. Dann ist der Kern von  $\operatorname{Im} M(z)$  unabhängig von  $z$  und insbesondere ist*

$$r = \operatorname{Rank} \left( \operatorname{Im} M(z) \right) \quad (2.34)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}_+$  identisch. Ferner existiert eine unitäre Matrix  $U$  derart, dass der Imaginärteil die Form

$$\operatorname{Im} (M(z)) = U^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Im} M_r(z) \end{pmatrix} U \quad (2.35)$$

annimmt, wobei  $M_r$  eine Herglotzfunktion mit Werten in  $\mathbb{C}^{r \times r}$  ist, deren Imaginärteil  $\operatorname{Im} M_r(z) > 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}_+$  erfüllt.

*Beweis.* Einen elementaren Beweis findet man in [GT00, Lemma 5.3.].  $\square$

Offensichtlich ist auch die Summe zweier Herglotzmatrizen gleicher Dimension wieder eine Herglotzmatrix. Wir werden später sehen, dass auch andere Konstruktionen analog zum skalaren Fall durchgeführt werden können.

Für matrixwertige Herglotzfunktionen kann man viele Eigenschaften der skalaren Herglotzfunktionen übertragen. Dies ist meistens sogar sehr leicht durch direktes Zurückführen auf den eindimensionalen Fall möglich, sodass die Beweise relativ kurz ausfallen. Das folgende Theorem stellt die wichtigsten und grundlegenden Eigenschaften von matrixwertigen Herglotzfunktionen zusammen. Man findet es in ähnlicher Art in [GT00, Theorem 5.4.].

**Theorem 2.22.** *Es sei  $M : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  eine matrixwertige Herglotzfunktion. Dann gilt:*

- (a) *Alle Diagonalelemente  $M_{jj}$  sind für  $j \in \{1, \dots, n\}$  skalare Herglotzfunktionen.*
- (b) *Falls eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$ , welche keine Lebesguesche Nullmenge ist, so existiert, dass jede skalare Herglotzfunktion  $M_{jj}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  verschwindende Randgrenzwerte auf dieser Menge hat, d. h.*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_{jj}(x + i\varepsilon) = 0 \text{ für alle } x \in A, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.36)$$

*so verschwinden alle Diagonalelemente identisch und  $M$  ist gleich einer konstanten selbstadjungierten Matrix.*

(c) Es existiert eine Lebesgueschen Nullmenge  $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}$  derart, dass die Randgrenzwerte

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M(x + i\varepsilon) \quad (2.37)$$

für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$  existieren und endlich sind.

(d) Es gibt ein verallgemeinertes matrixwertiges Borelmaß  $\Omega$ , welches

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+s^2} d(u|\Omega(s)u) < \infty \quad (2.38)$$

für alle  $u \in \mathbb{C}^n$  erfüllt und der matrixwertigen Herglotzfunktion  $M$  die folgende Darstellung verleiht:

$$M(z) = C + Dz + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{s-z} - \frac{s}{1+s^2} \right) d\Omega(s). \quad (2.39)$$

Hier ist  $C = \operatorname{Re} M(i)$  und  $D = \lim_{y \rightarrow \infty} M(iy)/(iy) \geq 0$ .

(e) Für das verallgemeinerte matrixwertige Borelmaß  $\Omega$  aus der Darstellungsformel (2.39) gilt weiterhin  $\Omega(K) \geq 0$  für alle beschränkten Borelmengen  $K \subseteq \mathbb{R}$ . Insbesondere wird durch  $(u|\Omega(\cdot)u)$  für jedes  $u \in \mathbb{C}^n$  ein positives Borelmaß definiert.

*Beweis.* Zu (a): Für ein beliebiges  $u \in \mathbb{C}$  ist  $(u|M(\cdot)u)$  komplex analytisch und somit holomorph. Da nun ebenfalls

$$\operatorname{Im} (u|M(z)u) = (u|\operatorname{Im} M(z)u) \geq 0$$

für alle  $z \in \mathbb{C}_+$  gilt, liegt eine skalare Herglotzfunktion vor.

Zu (c): Nach obigem Beweis und mit Hilfe von Satz 2.10 existieren die Grenzwerte  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (u|M(x+i\varepsilon)u)$  für alle  $u \in \mathbb{C}^n$  und  $x \in \mathbb{R}$  fast überall und sind auch fast überall endlich. Es sei nun  $z \in \mathbb{C}_+$  fest gewählt und man betrachte die Sesquilinearform

$$(u, v) \mapsto (u|M(z)v),$$

für welche die Polarisationsformel, vgl. Satz A.2, mit  $q(u) := (u|M(z)u)$  gilt:

$$(u|M(z)v) = \frac{1}{4} [q(u+v) - q(u-v) - iq(u+iv) + iq(u-iv)].$$

Nach dieser existiert dann der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M(x+i\varepsilon)$  für  $x \in \mathbb{R}$  fast überall.

Zu (d): Da  $m_u := (u|M(\cdot)u)$  für ein  $u \in \mathbb{C}^n$  eine skalare Herglotzfunktion ist, gilt die Darstellungsformel (2.2)

$$m_u(z) = c_u + d_u z + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{s-z} - \frac{s}{1+s^2} \right) d\omega_u(s)$$

mit einem positiven Borelmaß  $\omega_u$  und Konstanten  $c_u, d_u$ .

Verwenden wir auch hier die Polarisationsformel, so erhalten wir für  $u, v \in \mathbb{C}^n$  sofort

$$(u|M(z)v) = C_{u,v} + D_{u,v}z + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{s-z} - \frac{s}{1+s^2} \right) d\Omega_{u,v}(s)$$

mit Konstanten  $C_{u,v}$ ,  $D_{u,v}$  und einem verallgemeinerte komplexen Maß  $\Omega_{u,v}$ , welche folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} C_{u,v} &:= \frac{1}{4} [c_{u+v} - c_{u-v} - ic_{u+iv} + ic_{u-iv}] , \\ D_{u,v} &:= \frac{1}{4} [d_{u+v} - d_{u-v} - id_{u+iv} + id_{u-iv}] , \\ \Omega_{u,v}(K) &:= \frac{1}{4} [\omega_{u+v}(K) - \omega_{u-v}(K) - i\omega_{u+iv}(K) + i\omega_{u-iv}(K)] , \\ &K \subseteq \mathbb{R} \text{ beschränkt .} \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen sind auch die Matrizen  $C$ ,  $D$  und das verallgemeinerte matrixwertige Maß  $\Omega$  festgelegt. Dazu verwendet man Satz A.1. Da  $(u, v) \mapsto C_{u,v}$  eine Sesquilinearform ist, deren quadratische Form reell ist, ist sie hermitesch, d. h. für unsere Matrix gilt  $C = C^*$ . Für  $D$  gilt dasselbe und darüber hinaus  $D \geq 0$ . Durch Betrachtung des skalaren Darstellungssatz erhält man auch  $C = \operatorname{Re} M(i)$  und  $D = \lim_{y \rightarrow \infty} M(iy)/(iy)$ .

Zu (e): Dies folgt sofort aus dem vorherigen Beweis.

Zu (b): Nach Teil (a) und dem zweiten Teil von Satz 2.10 verschwinden die skalaren Herglotzfunktionen  $M_{jj}$  und damit auch die Diagonalelemente von  $D$  und  $\Omega$ . Nach Lemma 2.18 verschwinden nachfolgend alle Elemente von den positiv semidefiniten Matrizen, sodass nur  $M = C$  aus der Darstellungsformel bestehen bleibt. Dabei verschwindet die Diagonale der selbstadjungierten Matrix  $C$  ebenfalls.  $\square$

Auch das verallgemeinerte matrixwertige Borelmaß  $\Omega$  aus obiger Darstellungsformel (2.39) kann direkt aus den Randwerten der Herglotzfunktion berechnet werden. Dies funktioniert vollkommen analog zur skalaren Umkehrformel.

**Theorem 2.23.** *Es sei  $M$  eine matrixwertige Herglotzfunktion. Dann gilt für das verallgemeinerte matrixwertige Borelmaß  $\Omega$  aus Gleichung (2.39) die Inversionsformel*

$$\frac{1}{2}\Omega(\{t_1\}) + \frac{1}{2}\Omega(\{t_2\}) + \Omega((t_1, t_2)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) dx \quad (2.40)$$

für  $(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Die skalare Umkehrformel liefert mit der Polarisationsformel aus dem vorhergehenden Beweis von Theorem 2.22 direkt die Gleichung (2.40).  $\square$

Da es sich bei  $\Omega(K)$  für jede beschränkte Borelmenge  $K \subseteq \mathbb{R}$  um einen selbstadjungierten Operator handelt, können wir analog zum skalaren Fall das Maß als Stieltjes-Maß auffassen, indem wir eine monoton wachsende Abbildung  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$  derart finden, dass  $\Omega = \Omega_W$  nach Definition 1.49 gilt.

Die Definition ist in der Tat exakt die gleiche wie für positive Maße:

$$W(x) := \begin{cases} +\frac{1}{2} \left[ \Omega((0, x]) + \Omega([0, x)) \right] & , x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \left[ \Omega((x, 0]) + \Omega([x, 0)) \right] & , x < 0 . \end{cases} \quad (2.41)$$

Damit nimmt die Umkehrformel wiederum folgende Form an:

$$W(t_2) - W(t_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) dx . \quad (2.42)$$

Zur guter Letzt soll noch kurz erwähnt werden, wie man aus einer matrixwertigen Herglotzfunktion verschiedene andere Herglotzfunktionen konstruieren kann. Auch hier handelt es sich um eine Analogie aus dem Satz über skalare Herglotzfunktionen. Wir schreiben hier  $I_n$  für die Identitätsabbildung bzw. Einheitsmatrix auf  $\mathbb{C}^n$ .

**Satz 2.24.** *Es sei  $M : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine matrixwertige Herglotzfunktion und es sei  $A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  eine Matrix mit der Eigenschaft:*

$$A^* J_n A = J_n \quad \text{mit } J_n := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.43)$$

Schreiben wir  $A$  in eine Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{pq} \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ für } p, q = 1, 2 \quad (2.44)$$

und setzen  $A_{11} + A_{12}M(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}^+$  als invertierbar voraus, so ist auch

$$M_A(z) := (A_{21} + A_{22}M(z))(A_{11} + A_{12}M(z))^{-1} \quad (2.45)$$

eine matrixwertige Herglotzfunktion.

*Beweis.* Siehe [GT00, Theorem 6.4]. □

In dieser Notation gilt nun  $M_{I_{2n}} = M$  und  $(M_A)_B = M_{AB}$  für jede matrixwertige Herglotzfunktion  $M$  und Matrizen  $A, B$  welche (2.43) erfüllen. Für weitere Eigenschaften und Anwendungen dieser Konstruktionen verweisen wir auf [GT00].

## 2.5. Minimale Träger bei matrixwertigen Herglotzfunktionen

Auch für Herglotzmatrizen können wir minimale Träger der Lebesguezerlegung des zugeordneten verallgemeinerten matrixwertigen Borelmaßes  $\Omega$  angeben, die auf die Randwerte der Herglotzfunktion zurückgreifen. Dabei ist es sehr hilfreich, dass nach Satz 2.19 das Spurmaß  $\operatorname{tr} \Omega$  und  $\Omega$  äquivalent sind, d. h. die gleichen Nullmengen besitzen.

Das Maß  $\Omega$  sei wie üblich nach Korollar 1.31 zerlegt:

$$\Omega = \Omega_{ac} + \Omega_s = \Omega_{ac} + \Omega_{sc} + \Omega_{pp} . \quad (2.46)$$

Für diese Zerlegung beweisen wir folgende Darstellungen für minimale Träger der jeweiligen Anteile:

**Satz 2.25.** *Es sei  $M$  eine matrixwertige Herglotzfunktion und  $\Omega$  das zur Darstellungsformel (2.39) gehörige verallgemeinerte matrixwertige Maß und  $\omega := \operatorname{tr} \Omega$  das positive Maß nach Satz 2.19. Dann ist*

$$S_{\omega, ac} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{tr} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) \in (0, \infty) \right\} \quad (2.47)$$

ein minimaler Träger des absolut stetigen Anteils  $\Omega_{ac}$  und

$$S_{\omega,s} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{tr} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) = \infty \right\} \quad (2.48)$$

ein minimaler Träger des singulären Anteils  $\Omega_s$ . Diesen kann man weiterhin unterteilen in

$$S_{\omega,sc} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{tr} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) = \infty, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{tr} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) = 0 \right\},$$

einen minimalen Träger für das singulär stetige Maß  $\Omega_{sc}$  und einen kleinsten Träger

$$S_{\omega,pp} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{tr} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{tr} M(x + i\varepsilon) > 0 \right\}$$

für das rein atomare Maß  $\Omega_{pp}$ .

*Beweis.* Offensichtlich sind dies nach Theorem 2.13 die bekannten minimalen Träger von  $\omega$ , welches das zugeordnete Borelmaß der skalaren Herglotzfunktion  $\operatorname{tr} M$  ist. Da nun  $\omega$  und  $\Omega$  äquivalente Maße sind, folgt die Behauptung.  $\square$

In [GT00] findet man eine alternative Beschreibung oben genannter Träger, welche man wiederum leicht aus dem obigen Satz ableiten kann.

**Definition 2.26.** Es sei  $M$  eine matrixwertige Herglotzfunktion und  $\Omega$  das zur Darstellungsformel (2.39) gehörige verallgemeinerte matrixwertige Maß. Dann definieren wir folgende Mengen

$$S_{ac}(\Omega, r) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M(x + i\varepsilon) \text{ existiert endlich,} \right. \\ \left. \operatorname{Rank} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M(x + i\varepsilon) \right) = r \right\},$$

$$S_{ac}(\Omega) := \bigcup_{r=1}^n S_{ac}(\Omega, r),$$

$$S_{pp}(\Omega, r) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Rank} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon M(x + i\varepsilon) \right) = r \right\},$$

$$S_{pp}(\Omega) := \bigcup_{r=1}^n S_{pp}(\Omega, r),$$

$$S_s(\Omega) := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \operatorname{tr} (M(x + i\varepsilon)) = \infty \right\},$$

$$S_{sc}(\Omega) := \left\{ x \in S_s(\Omega) \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{tr} (M(x + i\varepsilon)) = 0 \right\},$$

$$S(\Omega) := S_{ac}(\Omega) \cup S_s(\Omega).$$

**Theorem 2.27.** Es sei  $M$  eine matrixwertige Herglotzfunktion und  $\Omega$  das zugehörige Maß mit der Lebesgueschen Zerlegung  $\Omega = \Omega_{ac} + \Omega_s = \Omega_{ac} + \Omega_{sc} + \Omega_{pp}$ . Dann gilt:

- (a)  $S_{ac}(\Omega)$  ist minimaler Träger von  $\Omega_{ac}$ .
- (b)  $S_{sc}(\Omega)$  ist minimaler Träger von  $\Omega_{sc}$ .
- (c)  $S_{pp}(\Omega)$  ist kleinster Träger von  $\Omega_{pp}$ .
- (d)  $S_s(\Omega)$  ist minimaler Träger von  $\Omega_s$ .
- (e)  $S(\Omega)$  ist minimaler Träger von  $\Omega$ .

*Beweis.* Wir definieren das positive Maß  $\omega := \text{tr } \Omega$ . Offensichtlich stimmen  $S_s(\Omega)$  bzw.  $S_{sc}(\Omega)$  mit  $S_{\omega,s}$  bzw.  $S_{\omega,sc}$  aus Satz 2.25 überein, sodass für diese kein weiterer Beweis notwendig ist.

Für den absolut stetigen Teil beachte, dass aus  $\text{tr } \text{Im } M(x + i0^+) \in (0, \infty)$  folgt, dass  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (u | \text{Im } M(x + i\varepsilon) u)$  für alle  $u \in \mathbb{C}^n$  endlich ist. Da  $M(x + i0^+)$  f. ü. endlich existiert, ist auch  $S_{ac}(\Omega)$  ein minimaler Träger von  $\Omega_{ac}$ .

Es bleibt nur der rein atomare Teil zu zeigen. Es sei dafür  $x \in S_{\omega,pp}$ . Dann gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \text{tr } M(x + i\varepsilon) \neq 0$  und damit auch

$$\text{Rank} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon M(x + i\varepsilon) \right) \geq 1.$$

Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich richtig.  $\square$

Der folgende Satz verallgemeinert das Theorem 2.14 aus dem skalaren Fall für matrixwertige Herglotzfunktionen. Wir werden die Situation allerdings so formulieren, wie sie im späteren Kapitel 5 vorliegen wird.

**Satz 2.28.** *Es seien  $M_0$  und  $M_1$  matrixwertige Herglotzfunktionen, wobei der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_1(\lambda + i\varepsilon)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  existiert und endlich ist. Darüber hinaus soll  $M_0(z) + M_1(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}_+$  invertierbar und*

$$M(z) := (M_0(z) + M_1(z))^{-1} (M_0(z)M_1(z) - I) \quad (2.49)$$

*eine matrixwertige Herglotzfunktion sein.*

*Dann gilt für das zu  $M$  gehörige verallgemeinerte matrixwertige Borelmaß  $\Omega$ , dass*

$$\tilde{S}_s := S_s^1 \cup S_s^2 \cup S_s^3 \text{ mit}$$

$$S_s^1 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det [M_0(x + i\varepsilon) + M_1(x + i\varepsilon)] = 0 \right\},$$

$$S_s^2 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det [M_0(x + i\varepsilon) + M_1(x + i\varepsilon)] \neq 0 \text{ existiert endlich,} \right. \\ \left. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|M_0(x + i\varepsilon)\| = \infty \right\},$$

$$S_s^3 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\det [M_0(x + i\varepsilon) + M_1(x + i\varepsilon)]| = \infty, \right. \\ \left. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|(M_0(x + i\varepsilon) + M_1(x + i\varepsilon))^{-1}\| = \infty \right\}$$

*ein minimaler Träger des singulären Anteils von  $\Omega$  ist.*

*Beweis.* Der Beweis kann analog zum skalaren Fall geführt werden, vgl. dazu den Beweis von Satz 2.14.

Man sieht andererseits leicht, dass  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \operatorname{tr} (M(x + i\varepsilon)) = \infty$  nur erfüllt werden kann, wenn  $x \in \tilde{S}_s$ . Dies bedeutet  $\tilde{S}_s \supseteq S_s(\Omega)$  und nach Theorem 2.27 ist auch die Menge  $\tilde{S}_s$  ein Träger von  $\Omega_s$ .

Die Minimalität folgt ebenso aus diesem Theorem, da die Mengen  $S_s^2$  und  $S_s^3$  nach dem Teil (c) aus Theorem 2.22 Lebesguesche Nullmengen sind.  $\square$

Der Satz gilt natürlich in der gleichen Form, wenn man anstatt der matrixwertigen Herglotzfunktion  $M$  die entsprechende skalare Herglotzfunktion

$$m(z) := \operatorname{tr} \left[ (M_0(z) + M_1(z))^{-1} (M_0(z)M_1(z) - I) \right]$$

betrachtet. Das obige  $\tilde{S}_s$  ist dann ein minimaler Träger des singulären Anteils des zugeordneten positiven Borelmaßes  $\omega$ .

### 3. Spektraltheorie

Der Spektralsatz für lineare selbstadjungierte Operatoren ist sowohl in der beschränkten als auch in der unbeschränkten Version ein unerlässliches Hilfsmittel der Funktionalanalysis. Auch für nichtselbstadjungierte Operatoren ist die Spektraltheorie, welche versucht, Informationen des Operators aus seinem Spektrum abzulesen, sehr fruchtbar. In diesem Kapitel soll nicht der gesamte Apparat der Spektraltheorie aufgebaut werden, sondern vor allem Seitenaspekte hervorgehoben und für unser Thema wichtige Erkenntnisse herausgearbeitet werden. Einige Beweise werden vorgeführt, um Anwendungen der Herglotzfunktionen aus Kapitel 2 zu demonstrieren.

Wir fokussieren uns bei allen Formulierungen auf beschränkte Operatoren, wobei allerdings sehr viele Definitionen und Sätze ohne größere Probleme auf unbeschränkte Operatoren erweitert werden können. Ebenso ist auch die Einschränkung auf selbstadjungierte Operatoren nicht immer notwendig.

#### 3.1. Grundlegende Bezeichnungen

Im gesamten Abschnitt bezeichnet  $\mathfrak{H}$  stets einen komplexen Hilbertraum. Unter einer *Orthogonalprojektion* verstehen wir einen beschränkten selbstadjungierten Operator  $P : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  mit  $P^2 = P$ . Wir verwenden hier größtenteils [GHK10], [Wei80] und [Wer05].

**Definition 3.1.** Ein operatorwertiges Maß  $E : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  nach Definition 1.2 heißt ein *Spektralmaß*, falls  $E(B)$  für alle Borelmengen  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  eine Orthogonalprojektion ist und darüber hinaus  $E(\emptyset) = 0$  und  $E(\mathbb{R}) = I_{\mathfrak{H}}$  gilt.

Eine wichtige Eigenschaft eines Spektralmaßes  $E$  ist, dass für disjunkte Borelmengen  $B_1, B_2$  immer

$$E(B_1)E(B_2) = 0 \tag{3.1}$$

gilt, was aus  $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$  und der Eigenschaft über Orthogonalprojektionen folgt. Für nichtdisjunkte Borelmengen kann man nun auch leicht zeigen, dass

$$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2) \tag{3.2}$$

richtig ist. Diese und andere Rechnungen zu Spektralmaßen findet man ausführlich in [GHK10, Kapitel 15] dargestellt.

In der Literatur ist häufig auch eine andere jedoch äquivalente Definition für ein Spektralmaß präsent. Dort wird die Sigma-Additivität in der starken Operatortopologie verlangt, während wir diese nur in der schwachen Operatortopologie voraussetzen. Man vergleiche dazu die Definition 1.2.

**Satz 3.2.** Ein Spektralmaß  $E$  ist immer sigma-additiv in der starken Operatortopologie, d. h. es gilt

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)x \tag{3.3}$$

für jede disjunkte Familie von Borelmengen  $(B_n)$  und jedes  $x \in \mathfrak{H}$ .

*Beweis.* Wir verwenden hier die Ideen des Beweises aus [GHK10].

Da wir für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  ein komplexes Maß  $\langle y, E(\cdot)x \rangle$  gegeben haben, gilt für eine endliche Vereinigung von disjunkten Mengen  $(A_n)$ :

$$\left\langle y, E\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)x \right\rangle = \left\langle y, \sum_{n=1}^N E(B_n)x \right\rangle.$$

Daraus folgt direkt, dass auch die Operatoren übereinstimmen. Dies bedeutet:

$$E\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) = \sum_{n=1}^N E(B_n).$$

Für eine unendliche Vereinigung von disjunkten Borelmengen  $(A_n)$  betrachten wir für ein beliebiges  $x \in \mathfrak{H}$  die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \left\| \left( E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \sum_{n=1}^N E(B_n) \right) x \right\| &= \left\| E\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right) x \right\| \\ &= \left\langle x, E\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right) x \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die  $\emptyset$ -Stetigkeit des komplexen Maßes  $\langle x, E(\cdot)x \rangle$  ausgenutzt und somit Gleichung (3.3) bewiesen.  $\square$

In Kapitel 1 wurde die Integration bezüglich eines operatorwertigen Maßes definiert, sodass wir nun in diesem Sinne auch das Integral bezüglich eines Spektralmaßes verstehen möchten. Die wesentlichen Eigenschaften des Integrals fassen wir in dem folgenden Satz zusammen. Man vergleiche dazu auch zum Beispiel [Wer05] und [Wei80].

**Satz 3.3.** *Es sei  $E$  ein Spektralmaß,  $K \subseteq \mathbb{R}$  ein Träger von  $E$  und  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  messbare Funktionen, welche auf  $K$  beschränkt sind. Dann gilt:*

- (a)  $f \mapsto \int f dE \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ist linear und stetig,
- (b)  $\| \int f dE \| \leq \|f\|_{\infty}$ ,
- (c)  $\int dE = I$ ,
- (d)  $(\int f dE)^* = \int \bar{f} dE$ ,
- (e)  $\int (f \cdot g) dE = \int f dE \cdot \int g dE$ ,
- (f) Ist  $f$  reell, so ist  $\int f dE$  selbstadjungiert.

*Beweis.* Wir erinnern daran, dass das Integral über ein operatorwertiges Maß durch die Eigenschaft

$$\left\langle y, \int f dE x \right\rangle = \int f(t) d\langle y, E(t)x \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{H} \quad (3.4)$$

eindeutig definiert wird. Man vergleiche dazu auch Definition 1.5. Es sei erwähnt, dass für eine auf  $K$  beschränkte Funktion  $f$  eine Konstante  $C > 0$  derart existiert, dass

$$\left| \int f(t) d\langle y, E(t)x \rangle \right| \leq C \|x\| \|y\|$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  gilt. Dies zeigt man z. B. leicht mit der Polarisierungsformel aus Satz A.2. Das Integral  $\int f dE \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  aus Definition 1.5 ist demnach für auf  $K$  beschränkte Funktionen  $f$  wohldefiniert.

Wir schreiben nun im weiteren Verlauf des Beweises abkürzend  $T_f := \int f dE$ .

Zu (c), (d) und (f): Mit Gleichung (3.4) ist  $\int dE = I_{\mathfrak{H}}$  sofort ersichtlich und (d) folgt aus der Berechnung des adjungierten Operators:

$$\langle y, (T_f)^* x \rangle = \overline{\int f(\lambda) d\langle x, E(\lambda)y \rangle} = \int \overline{f(\lambda)} d\langle E(\lambda)y, x \rangle = \langle y, T_{\bar{f}} x \rangle .$$

Insbesondere gilt auch Aussage (f).

Zu (e): Wir betrachten für beliebige  $x, y \in \mathfrak{H}$  das folgende Maß

$$\langle T_f^* y, E(B)x \rangle = \int f(t) d\langle y, E(t)E(B)x \rangle = \int_B f(t) d\langle y, E(t)x \rangle ,$$

wobei  $B \subseteq \mathbb{R}$  eine Borelmenge ist. Hier wurde  $E(B)E(C) = E(B \cap C)$  für zwei Borelmengen  $B, C \subseteq \mathbb{R}$  ausgenutzt. Demnach gilt nun:

$$\langle y, T_f T_g x \rangle = \int g d\langle T_f^* y, E(\cdot)x \rangle = \int gf d\langle y, E(\cdot)x \rangle = \langle y, T_{f \cdot g} x \rangle .$$

Hier haben wir die Integrationsformel aus dem Satz von Radon-Nykodým verwendet, siehe dazu Satz 1.42. Somit ist Aussage (e) bewiesen.

Zu (a) und (b): Nach dem bisher gezeigten gilt nun auch (b), denn

$$\|T_f x\|^2 = \langle x, (T_f)^* T_f x \rangle = \int |f(t)|^2 d\langle x, E(t)x \rangle \leq \|f\|_{\infty}^2 \|x\|^2 .$$

Daraus folgt die Stetigkeit für die Abbildung  $f \mapsto T_f$ . Da die Linearität der Abbildung offensichtlich ist, ist somit Aussage (a) gezeigt.  $\square$

Dieser Satz zeigt, dass man mit Hilfe eines Spektralmaßes und einer beschränkten reellwertigen Funktion einen selbstadjungierten beschränkten Operator definieren kann. Wir werden nun hingegen sehen, dass auch die Umkehrung gilt, d. h. man kann zu jedem selbstadjungierten Operator genau ein Spektralmaß zuordnen. Dies wird uns zum bekannten Spektralsatz führen.

**Satz 3.4 (Spektralsatz).** *Zu jedem selbstadjungierten Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  gibt es genau ein Spektralmaß  $E$ , für das die Stonesche Formel*

$$\begin{aligned} \langle y, E((-\infty, t])x \rangle &= \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle y, ((A - s - i\varepsilon)^{-1} - (A - s + i\varepsilon)^{-1}) x \rangle ds \end{aligned}$$

gilt. Dieses Spektralmaß erfüllt dann

$$A = \int_{\mathbb{R}} t dE(t). \quad (3.5)$$

Wir nennen es das Spektralmaß zu  $A$  und schreiben für dieses ab sofort immer  $E_A$ .

*Beweis.* Da nach Beispiel 2.7 die Abbildung  $z \mapsto \langle x, (A - z)^{-1}x \rangle$  für jedes  $x \in \mathfrak{H}$  eine Herglotzfunktion ist, existiert laut Theorem 2.6 ein endliches positives Borelmaß  $\mu_{x,x}$  mit

$$\langle x, (A - z)^{-1}x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s - z} d\mu_{x,x}(s)$$

und  $\mu_{x,x}(\mathbb{R}) \leq \|x\|^2$ . Bekanntlich kann das Borelmaß aus den Randdaten der Herglotzfunktion gewonnen werden, siehe die Umkehrformel aus Theorem 2.3. Man erhält in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \mu_{x,x}((-\infty, t]) &= \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} \langle x, ((A - s - i\varepsilon)^{-1} - (A - s + i\varepsilon)^{-1})x \rangle ds. \end{aligned}$$

Durch die Polarisierungsidentität aus Satz A.2 sind durch die obige Formel auch für  $x, y \in \mathfrak{H}$  komplexe Maße  $\mu_{y,x}$  definiert, nämlich

$$\mu_{y,x} := \frac{1}{4} (\mu_{y+x, y+x} - \mu_{y-x, y-x} + i\mu_{y-ix, y-ix} - i\mu_{y+ix, y+ix}).$$

Für diese gilt nun wiederum nach der Polarisierungsidentität:

$$\langle y, (A - z)^{-1}x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s - z} d\mu_{y,x}(s). \quad (3.6)$$

Da für jede fest gewählte Borelmenge  $B$  die Abbildung  $(y, x) \mapsto \mu_{y,x}(B)$  eine beschränkte Sesquilinearform ist, gibt es genau einen Operator  $E(B) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ , für den  $\langle y, E(B)x \rangle = \mu_{y,x}(B)$  für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$  gilt. Man vergleiche dazu Satz A.1. Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass  $B \mapsto E(B)$  ein Spektralmaß definiert. Für diese Rechnung verweisen wir auf [Wei80, Theorem 7.17].

Letztendlich folgt mit Anwenden von Satz 3.3 und Formel (3.6)

$$\int t dE(t) - z = \int (t - z) dE(t) = \left[ \int \frac{1}{t - z} dE(t) \right]^{-1} = A - z$$

für  $z \in \mathbb{C}^+$ , womit auch die Formel (3.5) gezeigt ist.  $\square$

Die Stonesche Formel zeigt insbesondere, dass das Spektrum von  $A$  ein Träger des Spektralmaßes  $E_A$  ist, d. h. es gilt  $E_A(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$ . Man sogar zeigen, dass dies genau der topologische Träger ist:

$$\sigma(A) = \text{supp}(E_A) := \left\{ s \in \mathbb{R} \mid E_A((s - \varepsilon, s + \varepsilon)) \neq 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0 \right\}. \quad (3.7)$$

Man vergleiche dazu [Tes09, Theorem 3.7].

Nun werden wir für die Abbildung  $f \mapsto \int f dE$  eine gewisse Eindeutigkeitsaussage erschließen, die uns ebenfalls zeigen wird, dass das Spektralmaß  $E_A$  aus obigem Satz für einen Operator  $A$  schon durch die Eigenschaft (3.5) eindeutig bestimmt ist. Für eine abgeschlossene Menge  $K \subseteq \mathbb{R}$  schreiben wir  $\mathcal{M}^\infty(K)$  für die beschränkten messbaren komplexwertigen Funktionen auf  $K$ . Dieser Raum sei ausgestattet mit der üblichen Supremumsnorm. Für die Identität in  $\mathcal{M}^\infty(K)$  schreiben wir  $id$  und die konstante Funktion  $t \mapsto 1$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{1}$ .

**Satz 3.5** (Messbarer Funktionalkalkül). *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert und  $\sigma(A)$  sein Spektrum. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{M}^\infty(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ , für die gilt:*

$$(a) \quad \Phi(id) = A, \quad \Phi(\mathbf{1}) = I,$$

(b)  $\Phi$  ist involutiver Algebrenhomomorphismus, d. h.

- $\Phi$  ist linear:  $\Phi(f + ag) = \Phi(f) + a\Phi(g)$
- $\Phi$  ist multiplikativ:  $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$
- $\Phi$  ist involutiv  $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$

für  $f, g \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$  und  $a \in \mathbb{C}$ ,

(c)  $\Phi$  ist stetig,

(d) Für  $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$  gleichmäßig beschränkt mit punktwweisen Grenzwert  $f \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$  gilt

$$\langle y, \Phi(f_n)x \rangle \rightarrow \langle y, \Phi(f)x \rangle \quad (3.8)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ .

Man schreibt gewöhnlich  $f(A)$  für den Operator  $\Phi(f)$ .

*Beweis.* Eindeutigkeit: Wir verweisen auf den Beweis im Standardwerk von D. Werner [Wer05, Satz VII.1.6].

Existenz: Aus dem vorherigen Satz 3.3 und Satz 3.4 folgt, dass  $f \mapsto \int f dE_A$  genau Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt. Es bleibt nur (d) nachzuweisen. Es gilt

$$\left\langle y, \int f_n dE x \right\rangle = \int f_n(t) d\langle y, E(t)x \rangle \longrightarrow \int f(t) d\langle y, E(t)x \rangle \quad (3.9)$$

nach dem Satz von Lebesgue, sodass die Existenz gezeigt ist.  $\square$

**Definition 3.6.** Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert und  $E_A$  sein Spektralmaß. Dann nennen wir für  $x, y \in \mathfrak{H}$  das komplexe Maß

$$\mu_{y,x}^A := \langle y, E_A(\cdot)x \rangle \quad (3.10)$$

das *spektrale Maß von  $A$  bezüglich  $x$  und  $y$* . Wir schreiben auch kurz  $\mu_{y,x}$ , wenn es offensichtlich ist, auf welchen Operator sich die Maße beziehen.

Diese Maße sind diejenigen, die im Beweis der Stoneschen Formel konstruiert wurden, und werden in den folgenden Kapiteln noch eine größere Rolle spielen. Man beachte, dass  $\mu_{x,x}^A$  ein endliches positives Maß mit kompaktem Träger, nämlich dem Spektrum von  $A$ , ist. Die Definition ist in der Literatur nicht üblich, da die Maße dort meistens keinen eigenen Namen erhalten.

Nach dem Spektralsatz besitzt der selbstadjungierte Operator und das ihm zugeordnete Spektralmaß exakt die gleiche Information, sodass man zum Beispiel die verschiedenen Spektralanteile mit Hilfe des Spektralmaßes beschreiben kann. Der nächste Satz wird dies anhand des Punktspektrums darstellen.

**Satz 3.7.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert. Dann gilt  $\text{Bild } E_A(\{\lambda\}) = \text{Kern}(A - \lambda)$  und somit entspricht das Punktspektrum von  $A$  genau den Atomen des zugeordneten Spektralmaßes  $E_A$ .*

*Beweis.* Wir verwenden die Beweisideen von [Wer05, Satz VII.1.18]. Es sei ein beliebiges  $x \in \text{Bild } E_A(\{\lambda\})$  gewählt, d. h.  $E_A(\{\lambda\})x = x$ . Demnach gilt für ein  $y \in \mathfrak{H}$  Folgendes:

$$\langle y, (A - \lambda)x \rangle = \langle y, (A - \lambda)E_A(\{\lambda\})x \rangle = \int (t - \lambda)\chi_{\{\lambda\}}(t) \langle y, E(t)x \rangle = 0.$$

Folglich liegt  $x$  im Kern des Operators  $A$ .

Gilt andererseits  $Ax = \lambda x$ , so ist mit Hilfe des messbaren Funktionalkalküls

$$x = \chi_{\{\lambda\}}(\lambda)x = \chi_{\{\lambda\}}(A)x = \int \chi_{\{\lambda\}}(t) dE(t)x = E_A(\{\lambda\})x,$$

wie behauptet. □

### 3.2. Multiplizitäten von Spektren

Der Begriff der Multiplizität des Spektrums verallgemeinert den Begriff der Vielfachheit von Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators in einem endlichen Hilbertraum auf den Fall eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes. Bekanntlich müssen selbstadjungierte Operatoren dann keine Eigenwerte besitzen, gleichwohl kann man auch dem stetigen Spektrum eine Multiplizität zuordnen.

Auch in diesem Abschnitt steht  $\mathfrak{H}$  immer für einen komplexen Hilbertraum. Hauptsächlich werden hier [AG93], [Tes09] und [Wer05] verwendet.

**Definition 3.8** (Zyklischer Unterraum). Es sei  $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Ein Vektor  $v \in \mathfrak{H}$  heißt *zyklischer Vektor für  $A$* , wenn der *Orbitraum*

$$\mathcal{O}_A(v) := \text{lin span} \left\{ A^k v \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (3.11)$$

dicht in  $\mathfrak{H}$  liegt.

Ein Unterraum  $U$  heißt *zyklischer Unterraum für  $A$* , wenn der *Orbitraum*

$$\mathcal{O}_A[U] := \text{lin span} \left\{ A^k u \mid k \in \mathbb{N}_0, u \in U \right\} \quad (3.12)$$

dicht in  $\mathfrak{H}$  liegt.

Neben dem zyklischen Unterraum gibt es noch den Begriff des erzeugenden Unterraumes, jedoch werden beide Begriffe oft synonym verwendet oder nicht unterschieden. Wir werden später zeigen, dass es sich in dieser Formulierung in der Tat um äquivalente Bezeichnungen handelt.

**Definition 3.9** (Erzeugender Unterraum). Es sei  $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Ein Unterraum  $U \subseteq \mathfrak{H}$  heißt ein *erzeugender Unterraum für  $A$* , wenn

$$\text{lin span} \{ E_A(\Delta)g \mid \Delta \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}, g \in U \} \quad (3.13)$$

dicht in  $\mathfrak{H}$  liegt.

Nun definieren wir einen globalen Begriff der Multiplizität. Die Vielfachheit für einen Eigenwert eines selbstadjungierten Operators definiert man bekanntlich als die Dimension des zugehörigen Eigenraumes. In einem endlichdimensionalen Hilbertraum gibt es auf diese Weise eine größte Vielfachheit, die der Operator für einen Eigenwert vorweisen kann. Diese werden wir die Multiplizität des Spektrums nennen und den Begriff auf unendlichdimensionale Hilberträume erweitern:

**Definition 3.10** (Multiplizität des Spektrums). Es sei  $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Die kleinste Dimension eines erzeugenden Unterraumes von  $A$  heißt die *Multiplizität des Spektrums von  $A$* .

Das Spektrum  $\sigma(A)$  heißt *einfach*, wenn die Multiplizität Eins beträgt.

Wir werden anschließend sehen, dass für einen selbstadjungierten Operator die Existenz eines zyklischen Vektors äquivalent dazu ist, dass der Operator ein einfaches Spektrum besitzt. Davor soll das folgende Theorem vorgestellt werden, welches ebenfalls als Spektralsatz bekannt ist und zeigt, dass jeder beschränkte selbstadjungierte Operator mit einem zyklischen Vektor als ein Multiplikationsoperator dargestellt werden kann.

**Theorem 3.11.** *Es sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit Spektralmaß  $E$  und  $v \in \mathfrak{H}$  ein zyklischer Vektor. Wir setzen*

$$w := \frac{v}{\|v\|} \quad \text{und} \quad m := \langle w, E(\cdot)w \rangle, \quad (3.14)$$

*d. h.  $m$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit kompaktem topologischem Träger. Dann existiert ein unitärer Operator  $U : \mathfrak{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, m)$  mit*

$$UAU^{-1} = M_{id}. \quad (3.15)$$

*Dabei ist  $(M_{id}f)(t) = t f(t)$  der Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, m)$ . Darüber hinaus gilt*

$$Uw = \mathbf{1}, \quad (3.16)$$

*wobei  $\mathbf{1}$  die konstante Funktion mit Wert 1 auf  $L^2(\mathbb{R}, m)$  ist.*

*Beweis.* Für den Beweis der ersten Aussage entnehmen wir die Ideen aus [Wer05, Theorem VII.1.20]. Wir definieren eine Abbildung  $V : L^2(\mathbb{R}, m) \rightarrow \mathfrak{H}$ , indem wir für ein  $\varphi \in C(\sigma(A))$  die Zuordnung  $\varphi \mapsto \varphi(A)w$  festsetzen. Da  $C(\sigma(A))$  dicht

in  $L^2(\mathbb{R}, m)$  liegt, können wir diese lineare Abbildung stetig und normerhaltend auf den ganzen Raum fortsetzen. Die so definierte Abbildung  $V$  ist unitär, denn für  $\varphi \in C(\sigma(A))$  gilt:

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}, m)}^2 = \int \overline{\varphi(t)}\varphi(t)d\langle w, E(t)w \rangle = \left\langle w, \int \overline{\varphi} dE \int \varphi dE w \right\rangle = \|\varphi(A)w\|^2.$$

Aufgrund des zyklischen Vektors  $w$  ist  $V$  auch surjektiv. Man definiert nun  $U := V^{-1}$  und erhält  $AU^{-1}\varphi = U^{-1}(id \cdot \varphi)$  für alle stetigen Funktionen  $\varphi$ . Aus dem üblichen Dichtigkeitsargument folgt somit Gleichung (3.15).

Weiterhin entnimmt man der Definition von  $U$ , dass  $U^{-1}\mathbf{1} = w$  gilt.  $\square$

Wir werden uns häufig mit Operatoren, die ein einfaches Spektrum besitzen, beschäftigen und das folgende Theorem wird sich dabei als sehr hilfreich erweisen. Es zeigt den Zusammenhang zwischen einem einfachen Spektrum und einem zyklischen Vektor.

**Theorem 3.12.** *Ein beschränkter selbstadjungierter Operator  $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  hat genau dann ein einfaches Spektrum, wenn er einen zyklischen Vektor  $v \in \mathfrak{H}$  besitzt.*

*Beweis.* Es sei  $v \in \mathfrak{H}$  ein zyklischer Vektor für  $A$ . Nehmen wir an, es existiert ein  $y \in \mathfrak{H}$  mit  $\langle y, E_A(\Delta)v \rangle = 0$  für alle Borelmengen  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ . Dann verwenden wir das Funktionalkalkül und erhalten

$$0 = \int t^k d\langle y, E(t)v \rangle = \langle y, A^k v \rangle$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Da nun  $v$  ein zyklischer Vektor ist, kann dies nur für  $y = 0$  erfüllt sein und somit ist  $\text{lin span } \{v\}$  ein erzeugender Unterraum.

Für die Umkehrung siehe den Beweis von [AG93, VI.69-Theorem 3].  $\square$

Besitzt der selbstadjungierte Operator ein einfaches Spektrum, so liegt demnach die ganze Information des Operators in dem Borelmaß  $m$  aus Theorem 3.11. Der nächste Satz zeigt, wie man z. B. das Punktspektrum des Operators direkt aus diesem Maß gewinnen kann.

**Satz 3.13.** *Es sei  $\mu$  ein endliches Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $A$  der Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , d. h. für  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$  gilt*

$$(Af)(t) = t f(t) \quad \mu\text{-f. ü.} \quad (3.17)$$

*Dann entspricht das Punktspektrum von  $A$  genau den Atomen von  $\mu$ .*

*Beweis.* Der Operator  $A - \lambda$  ist genau dann injektiv, wenn  $t - \lambda \neq 0$   $\mu$ -f. ü. Dies bedeutet  $\mu(\{\lambda\}) = 0$ . Da  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert von  $A$  ist, wenn  $A - \lambda$  nicht injektiv ist, trifft dieser Fall genau dann zu, wenn  $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$ .  $\square$

Diese Aussage kann man leicht auf einen beliebigen Multiplikationsoperator ausdehnen:

**Satz 3.14.** *Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $M_\phi$  der Multiplikationsoperator auf  $L^2(X, \mu)$  mit einer reellen beschränkten messbaren Funktion  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , d. h. für  $f \in L^2(X, \mu)$  gilt*

$$(M_\phi f)(t) = \phi(t)f(t) \quad \mu\text{-f. ü.} \quad (3.18)$$

*Wir haben in diesem Fall folgende Charakterisierung des Spektrums von  $M_\phi$ :*

$$\begin{aligned} \sigma_p(M_\phi) &= \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \mu(\{t \in X \mid \phi(t) = \lambda\}) \neq 0 \} \\ \rho(M_\phi) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Es existiert ein } C > 0 \text{ mit } |\phi(t) - \lambda| \geq C \text{ } \mu\text{-f. ü.} \} . \end{aligned}$$

*Wie immer gilt  $\sigma(M_\phi) = \sigma_p(M_\phi) \cup \sigma_c(M_\phi)$ , da  $M_\phi$  selbstadjungiert ist.*

Nun wenden wir uns der Betrachtung von selbstadjungierten Operatoren zu, die ein Spektrum mit endlicher Multiplizität besitzen. Die wesentliche Idee bei dieser Behandlung ist, den Operator in endlich viele Operatoren mit einem einfachen Spektrum zu zerlegen.

**Lemma 3.15.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator dessen Spektrum Multiplizität  $n \in \mathbb{N}$  besitzt. Dann existiert eine orthogonale Zerlegung des Hilbertraumes*

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{H}_j , \quad (3.19)$$

*wobei jeder Hilbertraum  $\mathfrak{H}_j$  ein abgeschlossener  $A$ -invarianter Unterraum ist und jeder Operator  $A|_{\mathfrak{H}_j} : \mathfrak{H}_j \rightarrow \mathfrak{H}_j$  ein einfaches Spektrum besitzt.*

*Beweis.* Nach der Voraussetzung gibt es einen erzeugenden Unterraum  $U$  der Dimension  $n$ . Wählen wir dort eine Basis  $(\tilde{g}_j)_{j=1}^n$ , so verwenden wir das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um die entsprechenden Räume zu konstruieren. Zuerst definieren wir  $g_1 := \tilde{g}_1 / \|\tilde{g}_1\|$  und

$$\mathfrak{H}_1 := \overline{\text{lin span}\{E_A(\Delta)g_1 \mid \Delta \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}\}} .$$

Es sei  $P_{\mathfrak{H}_1}$  die orthogonale Projektion auf diesen Raum. Induktiv definieren wir nun

$$\begin{aligned} g_k &:= \frac{\tilde{g}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathfrak{H}_j} \tilde{g}_k}{\|\tilde{g}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathfrak{H}_j} \tilde{g}_k\|} \\ \mathfrak{H}_k &:= \overline{\text{lin span}\{E_A(\Delta)g_k \mid \Delta \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}\}} \end{aligned}$$

für  $k = 2, \dots, n$ . Man beachte dabei, dass man durch dieses Verfahren wieder einen  $n$ -dimensionalen erzeugenden Unterraum, aufgespannt von  $(g_j)_{j=1}^n$ , entsprechend der Multiplizität erhält.

Wir definieren nun für ein fest gewähltes  $j \in \{1, \dots, n\}$  das neue Spektralmaß  $F_j := P_{\mathfrak{H}_j} E_A$  und den selbstadjungierten Operator  $B_j : \mathfrak{H}_j \rightarrow \mathfrak{H}_j$  durch

$$B_j := \int t dF_j(t) .$$

Da der Unterraum aufgespannt von  $g_j$  ein eindimensionaler erzeugender Unterraum für  $B_j$  ist, hat der Operator ein einfaches Spektrum. Da nun für jedes  $x_j \in \mathfrak{H}_j$  auch

$$Ax_j = \int t dE_A(t)x_j = \int t dF_j(t)x_j = B_j x_j \in \mathfrak{H}_j$$

gilt, ist  $\mathfrak{H}_j$  in der Tat  $A$ -invariant und es gilt  $A|_{\mathfrak{H}_j} = B_j$ .  $\square$

Nun kommen wir zurück auf die zu Beginn angedeutete Aussage, dass erzeugende und zyklische Unterräume nur verschiedene Formulierungen der gleichen Tatsache sind.

**Korollar 3.16.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator. Ein  $n$ -dimensionaler Unterraum  $U \subseteq \mathfrak{H}$  ist genau dann ein erzeugender Unterraum für  $A$ , wenn  $U$  ein zyklischer Unterraum für  $A$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $U$  ein  $n$ -dimensionaler erzeugender Unterraum. Dann existiert eine Zerlegung des Hilbertraumes nach Lemma 3.15 und je ein zyklischer Vektor  $v_j$  für  $A|_{\mathfrak{H}_j} : \mathfrak{H}_j \rightarrow \mathfrak{H}_j$ . Demnach gilt für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit Hilfe von Theorem 3.12, dass

$$\text{lin span} \left\{ A^k v_j \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (3.20)$$

dicht in  $\mathfrak{H}_j$  ist, sodass mit der Zerlegung von  $\mathfrak{H}$  auch Gleichung (3.12) gilt.

Es gelte nun umgekehrt (3.12). Nehmen wir an es existiert ein  $y \in \mathfrak{H}$  derart, dass  $\langle y, E(\Delta)u \rangle = 0$  für alle Intervalle  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  und  $u \in U$  gilt, so folgt mit der Spektraldarstellung von  $A$

$$0 = \int t^k d\langle y, E(t)u \rangle = \langle y, A^k u \rangle \quad (3.21)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach der Voraussetzung des zyklischen Unterraums muss nun  $y = 0$  gelten und somit ist  $U$  ein erzeugender Unterraum.  $\square$

Der nächste Satz verallgemeinert die Multiplikationsversion des Spektralsatzes, die wir für Operatoren mit einem einfachen Spektrum bewiesen haben, auf den Fall, dass das Spektrum endliche Multiplizität besitzt. Man verwendet auch hier die obige Zerlegung des Hilbertraumes und des Operators.

**Satz 3.17.** *Es sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit zugeordnetem Spektralmaß  $E$ . Die Multiplizität  $n \in \mathbb{N}$  des Spektrums sei endlich. Dann existieren positive Borelmaße  $\{m_i\}_{i=1}^n$ , für die  $\sigma(A)$  ein Träger ist, und ein unitärer Operator*

$$U : \mathfrak{H} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n L^2(\mathbb{R}, m_i) \quad (3.22)$$

mit

$$(UTU^{-1}f)_n(t) = t f_n(t). \quad (3.23)$$

für  $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_n =: (f_1, \dots, f_n)$ .

*Beweis.* Verwende das Lemma 3.15 und für jeden Unterraum  $\mathfrak{H}_j$  das bekannte Theorem 3.11. Vergleiche dazu auch [RS72].  $\square$

Wir haben nun gesehen, dass für einen selbstadjungierten Operator  $A$  mit Multiplizität  $n$  eine Orthonormalbasis  $(g_i)_{i=1}^n$  und die entsprechende Zerlegung des Hilbertraumes

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{H}_i \quad (3.24)$$

existiert. Definiert man die Borelmaße  $\nu_i := \langle g_i, E(\cdot)g_i \rangle$ , so kann man durch die Wahl der Orthonormalbasis sogar erreichen, dass alle diese Maße absolut stetig zu  $\nu_1$  sind:

**Satz 3.18.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator mit einem zyklischen Unterraum  $U$  der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Dann kann die Orthonormalbasis  $(g_i)_{i=1}^n$  in  $U$  so gewählt werden, dass für die spektralen Maße  $\nu_i := \langle g_i, E(\cdot)g_i \rangle$*

$$\nu_n \ll \nu_{n-1} \ll \cdots \ll \nu_1 \quad (3.25)$$

*gilt. Man nennt  $(g_i)_{i=1}^n$  dann eine geordnete Spektralbasis von  $A$ .*

*Beweis.* Siehe dazu [BS87, Theorem 7, Seite 172].  $\square$

**Definition 3.19.** Es sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Ein Vektor  $x \in \mathfrak{H}$  heißt *maximaler Spektralvektor für  $A$* , wenn das Borelmaß  $\mu_{x,x}$  zu allen  $\mu_{y,y}$  für  $y \in \mathfrak{H}$  absolut stetig ist.

Für jeden selbstadjungierten Operator existiert solch ein maximaler Spektralvektor und einen Beweis findet man ebenfalls in [BS87] oder in [Tes09, Lemma 3.16]. Für einen Operator mit einfachem Spektrum ist ein zyklischer Vektor auch immer ein maximaler Spektralvektor:

**Korollar 3.20.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert und  $v$  ein zyklischer Vektor für  $A$  und  $\mu := \mu_{v,v}$ . Dann gilt*

$$\mathfrak{H} = \{ f(A)v \mid f \in L^2(\mathbb{R}, \mu) \} \quad (3.26)$$

*und für jedes spektrale Maß bezüglich  $x \in \mathfrak{H}$  gilt*

$$\mu_{x,x} \ll \mu. \quad (3.27)$$

*Beweis.* Formel (3.26) gilt, da  $v$  ein zyklischer Vektor ist. Es sei  $x \in \mathfrak{H}$  und  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  eine Borelmenge mit  $\mu(\Delta) = 0$ . Dann gibt es ein  $f \in L^2(\mu)$  mit  $x = f(A)v$  und es gilt

$$\begin{aligned} \mu_{x,x}(\Delta) &= \langle x, E(\Delta)x \rangle = \langle v, |f(A)|^2 E(\Delta)v \rangle = \langle v, |f(A)|^2 \chi_\Delta(A)v \rangle \\ &= \int |f(t)|^2 \chi_\Delta(t) d\langle v, E(t)v \rangle = \int_\Delta |f(t)|^2 d\mu = 0, \end{aligned}$$

was die absolute Stetigkeit zeigt.  $\square$

Nach der Multiplikationsversion des Spektralsatzes ist ein selbstadjungierter Operator ein Multiplikationsoperator auf einem gewissen  $L^2$ -Raum. Der nächste Satz zeigt, wie diese Räume für unitär äquivalente Operatoren mit einfachem Spektrum aussehen müssen.

**Lemma 3.21.** *Es seien  $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  zwei selbstadjungierte Operatoren, deren Spektren einfach sind, und demnach jeweils unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \mu_1)$  bzw.  $L^2(\mathbb{R}, \mu_2)$  sind.*

*Dann sind  $A_1$  und  $A_2$  genau dann unitär äquivalent zueinander, wenn  $\mu_1$  und  $\mu_2$  gegenseitig absolut stetig sind, d. h. wenn die Maße äquivalent zueinander sind.*

*Beweis.* Sind die Operatoren  $A_1, A_2$  unitär äquivalent, so sind nach dem Beweis von [Tes09, Lemma 3.13] auch die Maße äquivalent zueinander.

Sind andererseits die Maße äquivalent, so gibt es eine invertierbare positive Funktion  $g$  mit  $d\mu_1 = g d\mu_2$  und  $d\mu_2 = g^{-1} d\mu_1$  nach dem Satz von Radon-Nykodým. Damit definieren wir eine Abbildung

$$U : L^2(\mathbb{R}, \mu_1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu_2), \quad f \longmapsto \sqrt{g}f,$$

welche wegen  $\langle Uf, Uf \rangle = \langle f, f \rangle$  und der Umkehrabbildung  $U^{-1}f = f/\sqrt{g}$  ein unitärer Operator ist. Nehmen wir ohne Einschränkung die Operatoren  $A_1$  und  $A_2$  als Multiplikationsoperatoren auf  $L^2(\mathbb{R}, \mu_1)$  bzw.  $L^2(\mathbb{R}, \mu_2)$  an, so sehen wir direkt, dass

$$U^* A_2 U f = A_1 f$$

für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu_1)$  gilt. □

Aufgrund dieses Satzes gibt es für zwei selbstadjungierte Operatoren  $A$  und  $B$  mit jeweils einfachem Spektrum folgende Sprechweisen. Die Operatoren  $A$  und  $B$  heißen von *gleichem Spektraltyp*, wenn es jeweils einen zyklischen Vektor  $v$  bzw.  $w$  so gibt, dass die zugeordneten spektralen Maße  $\mu_A := \langle v, E_A(\cdot)v \rangle$  und  $\mu_B := \langle w, E_B(\cdot)w \rangle$  gegenseitig absolut stetig zueinander sind. Haben  $\mu_A$  und  $\mu_B$  dagegen zwei disjunkte minimale Träger, so nennt man die Spektraltypen von  $A$  und  $B$  *unabhängig voneinander*.

In [Gil98, Theorem 3.3] findet man folgende allgemeine Charakterisierung für einen Operator, dessen Spektrum die Multiplizität Zwei besitzt:

**Theorem 3.22.** *Ein selbstadjungierter Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  hat genau dann ein Spektrum der Multiplizität Zwei, wenn es eine orthogonale Zerlegung des Hilbertraumes  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_3$  und des Operators  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$  gibt, für die gilt:*

- (a) *Jeder Operator  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) hat ein einfaches Spektrum.*
- (b)  *$A_1$  und  $A_2$  haben gleichen Spektraltyp.*
- (c) *die Spektraltypen von  $A_1$  und  $A_3$  sind unabhängig voneinander.*

Zum Abschluss dieses Abschnittes über Multiplizitäten von Spektren möchten wir noch wichtige Aussage im Zusammenhang mit zyklischen Unterräumen und Spektralmaßen festhalten. Wenn ein zyklischer Unterraum  $U$  für einen selbstadjungierten Operator  $A$  existiert, so legt dieser das Spektralmaß vollkommen fest, d. h. man muss nur die komplexen Maße  $\langle u, E_A(\cdot)v \rangle$  für Elemente  $u, v \in U$  kennen.

**Satz 3.23.** *Es sei  $U$  ein zyklischer Unterraum für einen selbstadjungierten Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  und  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  eine Borelmenge. Gilt  $\langle u, E_A(\Delta)u \rangle = 0$  für alle  $u \in U$ , so gilt auch  $E_A(\Delta) = 0$ .*

*Beweis.* Durch die übliche Polarisierung, vgl. Satz A.2, können wir die Voraussetzung auf

$$\langle u, E_A(\Delta)v \rangle = 0 \quad \text{für alle } u, v \in U \quad (3.28)$$

verstärken. Wir definieren für jedes  $m, n \in \mathbb{N}_0$  eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(\sigma(T))$  durch  $f(t) := t^m \chi_\Delta(t) t^n$ . Dann gilt für alle  $u, v \in U$  nach Gleichung (3.28):

$$0 = \int_{\Delta} t^{n+m} d\langle u, E_A(t)v \rangle = \langle u, f(A)v \rangle = \langle A^m u, \chi_\Delta(A) A^n v \rangle .$$

Da  $U$  ein zyklischer Unterraum ist, gilt demnach für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ :

$$0 = \langle y, \chi_\Delta(A)x \rangle = \int_{\Delta} d\langle y, E_A(t)x \rangle = \langle y, E_A(\Delta)x \rangle .$$

Dies bedeutet, dass nur  $E_A(\Delta) = 0$  gelten kann.  $\square$

Für einen Operator, dessen Spektrum einfach ist, erhalten wir aus obigen Satz sofort folgende Eigenschaft:

**Korollar 3.24.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert mit zyklischem Vektor  $v$ . Dann sind die Borelmaße  $\langle v, E_A(\cdot)v \rangle$  und  $E_A$  äquivalent, d. h. sie besitzen genau die gleichen Nullmengen.*

Den folgenden Satz werden wir später benötigen, wenn wir uns explizit mit dem Punktspektrum eines selbstadjungierten Operators auseinandersetzen. Er besagt, dass ein zyklischer Vektor bzw. ein zyklischer Unterraum nicht orthogonal zu einem Eigenraum stehen kann.

**Satz 3.25.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert mit einem zyklischem Unterraum  $U$  und  $x \in \mathfrak{H}$  erfülle die Eigenwertgleichung  $(A - \lambda)x = 0$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Gilt nun*

$$\langle u, x \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U ,$$

so ist zwangsläufig  $x = 0$ .

*Beweis.* Es sei  $u \in U$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Dann gilt

$$0 = \lambda^k \langle u, x \rangle = \langle A^k u, x \rangle ,$$

sodass aus der Linearität des Skalarproduktes folgt, dass  $\langle v, x \rangle = 0$  für alle  $v \in \mathcal{O}_A[U]$  gilt. Da der Orbitraum dicht liegt, folgt daraus  $x = 0$ .  $\square$

**Korollar 3.26.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert mit einem zyklischem Vektor  $v \in \mathfrak{H}$ . Dann ist*

$$v \notin (\text{Bild } E_A(\{\lambda\}))^\perp \quad (3.29)$$

für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  des Operators  $A$

Die Betrachtungen in diesem Abschnitt und vor allem der vorherige Satz 3.23 zeigten, dass man für ein Spektrum mit endlicher Multiplizität nicht das operatorwertige Spektralmaß betrachten muss, sondern dass endliche viele positive Maße ausreichen, um den Operator spektral zu untersuchen. Dies bringt die Spektraltheorie in Verbindung zu matrixwertigen Herglotzfunktionen.

Wir zeigen, dass man zu einem selbstadjungierten Operator, dessen Spektrum endliche Multiplizität aufweist, auf natürliche Weise eine matrixwertige Herglotzfunktion zuordnen kann. Diese Herglotzfunktion beinhaltet dann sämtliche Spektralinformationen des Operators.

**Satz 3.27.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert mit einem Spektrum der endlichen Multiplizität  $p \in \mathbb{N}$  und  $n \geq p$  eine natürliche Zahl. Weiterhin sei ein linearer Operator von endlichem Rang  $V : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathfrak{H}$  so gewählt, dass Bild  $V$  ein zyklischer Unterraum für  $A$  ist. Dann definiert*

$$z \mapsto V^*(A - z)^{-1}V \quad (3.30)$$

eine matrixwertige Herglotzfunktion für  $z \in \mathbb{C}_+$ . Das zugeordnete verallgemeinerte matrixwertige Borelmaß  $\Omega$  nach Theorem 2.22 ist äquivalent zum Spektralmaß  $E_A$ , d. h. sie besitzen die gleichen Nullmengen. Insbesondere entspricht

$$S_{pp} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \operatorname{tr} V^*(A - x - i\varepsilon)^{-1}V \neq 0 \right\} \quad (3.31)$$

genau dem Punktspektrum von  $A$ .

*Beweis.* Die Abbildung  $z \mapsto V^*(A - z)^{-1}V$  definiert offensichtlich eine matrixwertige Herglotzfunktion. Vergleiche dazu auch Beispiel 2.7. Das matrixwertige Maß  $\Omega$  ist nach dem Spektralsatz durch folgende Gleichung gegeben:

$$V^*(A - z)^{-1}V = \int \frac{1}{t - z} d(V^*E_A(t)V) =: \int \frac{1}{t - z} d\Omega(t) .$$

Weiterhin besitzen nach dem obigen Satz 3.23 die Borelmaße  $E_A$  und  $\Omega$  die gleichen Nullmengen.

Aus Kapitel 2 ist bekannt, dass Gleichung (3.31) einen kleinsten Träger für den rein atomaren Anteil  $\Omega_{pp}$  definiert. Nach Satz 3.7 entsprechen die Eigenwerten des Operators  $A$  genau den Atomen des Spektralmaßes.  $\square$

Diese Philosophie, das Spektralmaß eines Operators durch ein matrixwertiges Maß zu ersetzen, und die Konstruktion der Herglotzfunktion über einen zyklischen Unterraum werden in den letzten Kapiteln dieser Arbeit nochmals aufgegriffen.

### 3.3. Absolut stetige und singular stetige Spektren

In Abschnitt 1.6 haben wir den Lebesgueschen Zerlegungssatz kennengelernt, welcher unter anderem besagt, dass jedes  $\sigma$ -endliche Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  eindeutig in einen absolut stetigen, einen singular stetigen und einen rein atomaren Anteil bezüglich des Lebesguemaßes zerlegt werden kann. Nach diesem Satz werden wir nun eine analoge Zerlegung des Spektrums  $\sigma(A)$  eines selbstadjungierten Operators  $A$  auf dem komplexen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  vornehmen. Wir benutzen hier hauptsächlich [Tes09] und [Kat66].

**Definition 3.28.** Für ein endliches Borelmaß  $\mu$  definieren wir das *Spektrum von  $\mu$*  durch:

$$\sigma[\mu] := \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \mu((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) \neq 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0 \} . \quad (3.32)$$

Wir geben also dem topologischen Träger aus Kapitel 1.5 für ein endliches positives Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  einen neuen Namen, möchten diesen Begriff aber teilweise auch für Spektralmaße verwenden. Der Name rechtfertigt sich, da für einen selbstadjungierten Operator  $A$  bekanntlich  $\sigma(A) = \sigma[E_A]$  gilt. In dieser Sprechweise heißt dies, dass das Spektrum des Spektralmaßes genau dem Spektrum des Operators entspricht. Wir entnehmen diese Sprechweise aus [Tes09, Ch. 3.2] und erinnern an folgende Tatsache aus Kapitel 1:

**Korollar 3.29.** *Das Spektrum  $\sigma[\mu]$  ist ein abgeschlossener Träger für das endliche Maß  $\mu$ .*

Für ein rein atomares Maß ist das Spektrum demnach im Allgemeinen nicht der kleinste Träger, da Häufungspunkte von Atomen hinzugenommen werden.

Wir wissen, dass für einen selbstadjungierten Operator  $A$  mit einem einfachen Spektrum ein zyklischer Vektor  $v \in \mathfrak{H}$  existiert und der Operator unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  ist, wobei  $\mu := \langle v, E_A(\cdot)v \rangle$  das zugeordnete spektrale Maß ist. Das Spektrum zerlegen wir deswegen gemäß dieses Maßes in drei Anteile.

**Definition 3.30.** Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert mit einem einfachen Spektrum und  $v \in \mathfrak{H}$  ein zyklischer Vektor. Das zugeordnete spektrale Maß  $\mu := \langle v, E_A(\cdot)v \rangle$  hat nach Korollar 1.30 eine eindeutige Lebesguesche Zerlegung

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp} .$$

Wir definieren nun  $\sigma_{ac}(A) := \sigma[\mu_{ac}]$  als das *absolut stetige Spektrum*,  $\sigma_s(A) := \sigma[\mu_s]$  als das *singuläre Spektrum*,  $\sigma_{sc}(A) := \sigma[\mu_{sc}]$  als das *singular stetige Spektrum* und  $\sigma_{pp}(A) := \sigma[\mu_{pp}]$  als das *reine Punktspektrum* von  $A$ .

Aufgrund von Lemma 3.21 ist diese Aufspaltung des Spektrums wohldefiniert und unabhängig von der Wahl des zyklischen Vektors bzw. des Maßes  $\mu$ . Das reine Punktspektrum  $\sigma_{pp}(A)$  bezeichnen wir nach dem englischen Begriff *pure point spectrum*. Es umfasst alle Eigenwerte des Operators  $A$ , im Allgemeinen aber mehr. Es gilt hingegen immer

$$\sigma_{pp}(A) = \overline{\sigma_p(A)} . \quad (3.33)$$

Offensichtlich gilt nun für das Spektrum des Operators  $A$  die Zerlegung

$$\sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_s(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sc}(A) \cup \sigma_{pp}(A) \quad (3.34)$$

wobei aber keine der Vereinigungen disjunkt sein muss.

Möchten wir nun diese Zerlegung auch für selbstadjungierte Operatoren zeigen, deren Spektrum eine höhere Multiplizität besitzt, so bietet sich die Formulierung über eine geordnete Spektralbasis und einen maximalen Spektralvektor an.

**Definition 3.31.** Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator mit maximalem Spektralvektor  $x \in \mathfrak{H}$ . Das Spektralmaß  $\mu := \langle x, E_A(\cdot)x \rangle$  hat eine eindeutige Lebesguesche Zerlegung

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}.$$

Wir definieren nun  $\sigma_{ac}(A) := \sigma[\mu_{ac}]$  als das *absolut stetige Spektrum*,  $\sigma_s(A) := \sigma[\mu_s]$  als das *singuläre Spektrum*,  $\sigma_{sc}(A) := \sigma[\mu_{sc}]$  als das *singulär stetige Spektrum* und  $\sigma_{pp}(A) := \sigma[\mu_{pp}]$  als das *reine Punktspektrum* von  $A$ .

Hier muss allerdings die Wohldefiniertheit gezeigt werden, d. h. dass die Zerlegung nicht von der genauen Wahl des maximalen Spektralvektors abhängt. Aus diesem Grund wird häufig, z. B. in [Kat66] und [Tes09], eine alternative Definition der Spektralanteile gegeben, welche wir ebenfalls kurz vorstellen möchten.

**Definition 3.32.** Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert. Ein Element  $x \in \mathfrak{H}$  heißt dann *absolut stetig*, wenn das zugeordnete Spektralmaß  $\mu_{x,x}$  absolut stetig ist. Analog definiert man *singulär*, *singulär stetig* und *rein atomar* als Begriffe für  $x \in \mathfrak{H}$ .

Die Menge aller absolut stetigen Elemente bezeichnet man mit  $\mathfrak{H}_{ac}$  und ebenso  $\mathfrak{H}_s$ ,  $\mathfrak{H}_{sc}$  und  $\mathfrak{H}_{pp}$ . Man kann leicht zeigen, dass dies abgeschlossene  $A$ -invariante Unterräume sind und

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac} \oplus \mathfrak{H}_s = \mathfrak{H}_{ac} \oplus \mathfrak{H}_{sc} \oplus \mathfrak{H}_{pp} \quad (3.35)$$

gilt. Die doppelte Einschränkung  $A_{ac} := A|_{\mathfrak{H}_{ac}} : \mathfrak{H}_{ac} \rightarrow \mathfrak{H}_{ac}$  heißt der *absolut stetige Anteil* von  $A$ . Analog heißt  $A_s$  der *singuläre Anteil*,  $A_{sc}$  der *singulär stetige Anteil* und  $A_{pp}$  der *rein atomare Anteil* des Operators  $A$ .

Mit Hilfe dieser Einschränkungen auf die invarianten Unterräume kann man nun die obigen Spektralanteile von  $A$  als die jeweiligen Spektren von  $A_{ac}$ ,  $A_{sc}$  und  $A_{pp}$  definieren. Dies wäre die angesprochene alternative Definition, die z. B. in dieser Form in [Kat66] zu finden ist. Für uns ergibt sich dies als folgender Satz:

**Satz 3.33.** Für einen selbstadjungierten Operator  $A$  gelten mit obigen Definitionen  $\sigma_{ac}(A) = \sigma(A_{ac})$ ,  $\sigma_{sc}(A) = \sigma(A_{sc})$  und  $\sigma_{pp}(A) = \sigma(A_{pp})$ .

*Beweis.* Siehe [Tes09, Chapter 3]. □

Die in diesem Abschnitt definierte Aufspaltung des Spektrums kann wortwörtlich auch für unbeschränkte Operatoren übertragen werden und findet dann vor allem in der mathematischen Physik seine Anwendungen. Ein Beispiel für einen Operator mit singulär stetigen Spektrum mit Anwendungen in der quantenmechanischen Streutheorie findet sich in [Pea78].

Abschließend für diesen Abschnitt zeigen wir eine Querverbindung zu den Herglotz-funktionen aus Kapitel 2: Mit Hilfe der minimalen Trägern für Herglotzfunktionen, vgl. Theorem 2.13, können wir leicht folgende Beschreibung für das stetige Spektrum bzw. das Punktspektrum ableiten. Beachte dazu auch Satz 1.47.

**Beispiel 3.34.** Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator mit zyklischem Vektor  $v \in \mathfrak{H}$ . Aus Theorem 2.13 folgt dann, dass ein Element  $\lambda \in \mathbb{R}$ , welches

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \langle v, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}v \rangle \in (0, \infty)$  erfüllt, zum absolut stetigen oder singular stetigen Spektrum gehört.

Ein Element  $\lambda$  gehört dagegen genau dann zum Punktspektrum des Operators  $A$ , wenn  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \langle v, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}v \rangle \neq 0$  gilt.

### 3.4. Technische Hilfsmittel

In diesem Abschnitt wird keine neue Theorie eingeführt, sondern verschiedene Grenzwerte berechnet, die in Kapitel 5 konkret verwendet werden. Die folgenden Grenzwerte stehen im Zusammenhang mit dem Spektrum eines selbstadjungierten Operators  $A$  bzw. mit der Resolvente  $(A - z)^{-1}$  des Operators und zur Berechnung werden wir den Spektralsatz verwenden.

**Satz 3.35.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator und  $\lambda \notin \sigma_p(A)$  eine reelle Zahl. Dann konvergiert*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle = \langle y, x \rangle \quad (3.36)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ .

*Beweis.* Zuerst halten wir fest, dass  $E_A(\{\lambda\}) = 0$ , da  $\lambda$  kein Eigenwert ist. Definieren wir die reelle Funktion  $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $f_\varepsilon(t) := (t - \lambda)/(t - \lambda - i\varepsilon)$ , so sehen wir direkt, dass für alle  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$

$$|f_\varepsilon(t)| \leq 1 \quad \text{und} \quad f_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1$$

gilt. Mit Hilfe der Spektralsatzes und des Satzes von Lebesgue erhalten wir

$$\langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle = \int f_\varepsilon(t) d\langle y, E_A(t)x \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle y, x \rangle,$$

wie behauptet. □

Der obige Satz und alle Folgerungen, die wir im Weiteren daraus ziehen werden, sind genauso richtig, wenn wir  $i\varepsilon$  mit  $-i\varepsilon$  ersetzen. Man kann diesen Grenzwert sogar durch eine beliebige nichttangente Annäherung formulieren, ohne die Aussagen zu verändern.

**Korollar 3.36.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Fordert man nun, dass  $x \in (\operatorname{Bild} E_A(\{\lambda\}))^\perp$ , so konvergiert*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle = \langle y, x \rangle \quad (3.37)$$

für alle  $y \in \mathfrak{H}$ .

*Beweis.* Nach obigen Satz ist nur der Fall  $\lambda \in \sigma_p(A)$  zu zeigen. Da nun aber  $\langle y, E_A(\{\lambda\})x \rangle = 0$  gilt, ist der obigen Beweis auch für diesen Fall richtig. □

**Korollar 3.37.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Dann konvergiert*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle = \langle y, Qx \rangle < \infty \quad (3.38)$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ , wobei  $Q := I_{\mathfrak{H}} - E_A(\{\lambda\})$  die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement des Eigenraumes zu  $\lambda$  ist.

*Beweis.* Zerlegt man  $x = E_A(\{\lambda\})x + Qx$ , so gilt

$$\langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle = \langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)Qx \rangle$$

und das obige Korollar 3.36 ist anwendbar.  $\square$

Nun formulieren drei Propositionen, die auf die genaue Situation für das spätere Kapitel 5 zugeschnitten sind.

**Proposition 3.38.** *Es seien  $\mathfrak{H}_0$  und  $\mathfrak{H}_1$  Hilberträume, wobei letzterer endlichdimensional ist, und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Weiterhin sei ein selbstadjungierter Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$  und ein Operator  $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_0)$  gegeben. Dann existiert für jedes  $x \in (\text{Bild } E_A(\{\lambda\}))^\perp$  der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x = V^*x. \quad (3.39)$$

*Beweis.* Wählen wir einen Vektor  $u \in \mathfrak{H}_1$  und berechnen mit Korollar 3.36:

$$\begin{aligned} \langle u, V^*(A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle_{\mathfrak{H}_1} &= \langle Vu, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle_{\mathfrak{H}_0} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle Vu, x \rangle_{\mathfrak{H}_0} = \langle u, V^*x \rangle_{\mathfrak{H}_1}. \end{aligned}$$

Da der obige Grenzwert für alle  $u \in \mathfrak{H}_1$  existiert und der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  endlichdimensional ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 3.39.** *Es seien  $\mathfrak{H}_0$  und  $\mathfrak{H}_1$  Hilberträume, wobei letzterer endlichdimensional ist, und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Weiterhin sei ein selbstadjungierter Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ , ein Operator  $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_0)$  und eine Projektion  $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$  gegeben. Die Projektion soll darüber hinaus Folgendes erfüllen:*

$$\text{Bild } VP \subseteq (\text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\}))^\perp.$$

*Dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P^*V^*(A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x = P^*V^*x \quad (3.40)$$

für alle  $x \in \mathfrak{H}_0$ .

*Beweis.* Wir definieren die Orthogonalprojektion  $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$  durch das Spektralmaß  $Q := I_{\mathfrak{H}_0} - E_{A_0}(\{\lambda\})$ . Wir wählen einen Vektor  $u \in \mathfrak{H}_1$  und berechnen mit obigem Korollar 3.37:

$$\begin{aligned} \langle u, P^*V^*(A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle_{\mathfrak{H}_1} &= \langle VPu, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A - \lambda)x \rangle_{\mathfrak{H}_0} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle VPu, Qx \rangle_{\mathfrak{H}_0} = \langle QVPu, x \rangle_{\mathfrak{H}_0} = \langle VPu, x \rangle_{\mathfrak{H}_0} = \langle u, P^*V^*x \rangle. \end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass nach Voraussetzung  $QVP = VP$  gilt. Da der obige Grenzwert für alle  $u \in \mathfrak{H}_1$  existiert und der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  endlichdimensional ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 3.40.** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Dann existiert für jedes  $z \in \text{Bild}(A - \lambda)$  genau ein  $x \in \mathfrak{H}$ , welches*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle y, (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1} z \rangle = \langle y, x \rangle \quad (3.41)$$

für alle  $y \in \mathfrak{H}$  erfüllt.

Man schreibt gewöhnlich

$$\text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A - \lambda - i\varepsilon)^{-1} z := x \quad (3.42)$$

und spricht von einem schwachen Grenzwert.

*Beweis.* Die Existenz von  $x$  folgt aus Korollar 3.37 und dieses zeigt ebenso, dass nur  $x \in E_A(\{\lambda\})^\perp$  gelten kann. Die Eindeutigkeitsaussage ist mit Gleichung (3.41) offensichtlich erfüllt.  $\square$

### 3.5. Aronszajn-Donoghue-Theorie

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der Störungstheorie von selbstadjungierten Operatoren präsentiert. Wir verwenden hier hauptsächlich [Kat66] und [Sch12] und verweisen für Beweise auf diese zwei Werke.

**Satz 3.41.** *Es sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator und  $V$  ein Operator von endlichem Rang so gewählt, dass  $B = A + V$  ebenfalls selbstadjungiert ist. Dann sind die absolut stetigen Anteile  $A_{ac}$  und  $B_{ac}$  aus Definition 3.32 unitär äquivalent.*

*Beweis.* Siehe [Kat66, X.3, Theorem 4.4] und [Kat57].  $\square$

Der obige Satz gilt in dieser Form auch noch für Störungen  $V$  aus dem Raum der Spurklassenoperatoren. Man vergleiche dazu ebenfalls [Kat66]. Insbesondere wissen wir nun, dass das absolut stetige Spektrum unter einer endlichdimensionalen Störung invariant bleibt, sodass dieser Spektralanteil für die weitere Diskussion in Kapitel 5 durchweg uninteressant ist.

Unter der sogenannten *Aronszajn-Donoghue-Theorie* versteht man die Untersuchung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators unter Störungen vom Rang Eins. Diese zeigt eindrucksvoll, dass das singuläre Spektrum dem obigen Satz nicht genügt und sich schon unter Störung vom Rang Eins gänzlich verändern kann. Dies werden wir gleich an einem Beispiel demonstrieren.

Im Zentrum der Aronszajn-Donoghue-Theorie steht eine skalare Herglotzfunktion, die hier kurz vorgestellt wird. Dabei ist  $A$  ein selbstadjungierter Operator im komplexen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  und  $v$  ein zyklischer Vektor. Wir bezeichnen das spektrale Maß bezüglich  $v$  mit  $m := \langle v, E_A(\cdot)v \rangle$  und betrachten nun folgenden gestörten Operator

$$A_\alpha = A + \alpha v \langle v, \cdot \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.43)$$

und ordnen diesem das Maß  $m_\alpha := \langle v, E_{A_\alpha}(\cdot)v \rangle$  zu. Wir definieren die Herglotzfunktion  $F$  und eine reelle Funktion  $G$  durch

$$F(z) := \int \frac{1}{t - z} dm(t) \quad \text{und} \quad G(s) := \int \frac{1}{(t - s)^2} dm(t) \quad (3.44)$$

für  $z \in \mathbb{C}_+$  und  $s \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 3.42.** *Ist für ein  $s \in \mathbb{R}$  die Bedingung  $G(s) < \infty$  erfüllt, so gilt*

$$F(s) := \int \frac{1}{t-s} dm(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(s + i\varepsilon)$$

und

$$G(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(s + i\varepsilon) - F(s)}{i\varepsilon}.$$

*Beweis.* Wir formulieren hier den Beweis von [Sch12, Lemma 9.9] aus. Man beachte dazu, dass aus der Voraussetzung  $G(s) < \infty$  sofort folgt, dass  $m(\{s\}) = 0$  gilt. Weiterhin definieren wir für  $\varepsilon > 0$  die Funktionen

$$f_\varepsilon(t) := \frac{1}{t-s-i\varepsilon}, \quad f_0(t) := \frac{1}{t-s}, \quad g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{t-s-i\varepsilon} - \frac{1}{t-s} \right)$$

und zwar  $m$ -fast überall. Dann gilt durch Abschätzen des Betrags für  $t \neq s$

$$|f_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{(t-s)^2 + \varepsilon^2}} \leq |f_0(t)|$$

und

$$|g_\varepsilon(t)| = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{|t-s|\sqrt{(t-s)^2 + \varepsilon^2}} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{(t-s)^2} = |f_0(t)|^2.$$

Nun ist aufgrund von  $G(s) < \infty$  die Funktion  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}, m) \subseteq L^1(\mathbb{R}, m)$ , sodass sowohl  $F(t)$  endlich existiert, als auch mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(s + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int f_\varepsilon dm = \int f_0 dm = F(s)$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(s + i\varepsilon) - F(s)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int g_\varepsilon dm = \int i |f_0(t)|^2 dm(t) = iG(s)$$

gilt. □

Das folgende Theorem fasst die Ergebnisse der Aronszajn-Donoghue-Theorie zusammen. Wir entnehmen dieses im Wesentlichen aus [Sch12, Chapter 9] und [Sim10, Chapter 12].

**Theorem 3.43** (Aronszajn-Donoghue). *Es sei  $\alpha \neq 0$  gegeben. Dann gilt:*

(a) *Die Menge*

$$P_\alpha := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid G(\lambda) < \infty, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\lambda + i\varepsilon) = -1/\alpha \right\}$$

*ist der kleinste Träger des rein atomaren Anteils von  $m_\alpha$ .*

(b) *Die Menge*

$$S_\alpha := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid G(\lambda) = \infty, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\lambda + i\varepsilon) = -1/\alpha \right\}$$

*ist ein Träger des singulär stetigen Anteils von  $m_\alpha$ .*

(c) Die Menge

$$L := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} F(\lambda + i\varepsilon) > 0 \right\}$$

ist ein Träger des absolut stetigen Anteils von  $m_\alpha$ .

(d) Für jedes Atom  $\lambda \in P_\alpha$  gilt  $m_\alpha(\{\lambda\}) = 1/(\alpha^2 G(\lambda))$ .

(e) Die singulären Anteile von  $m_\alpha$  und  $m_\beta$  sind für  $\beta \neq \alpha$  singulär zueinander.

(f) Die absolut stetigen Anteile von  $A$  und  $A_\alpha$  sind unitär äquivalent zueinander.

*Beweis.* Siehe [Sch12, Theorem 9.10]. □

Das folgende Beispiel findet man in ähnlicher Art in [Sch12] und belegt, dass sich das singuläre Spektrum schon unter eindimensionalen Störungen beliebig sprunghaft verhalten kann. In diesem Fall verschwindet das singulär stetige Spektrum vollständig durch eine kleine Störung, während Eigenwerte an neuen Orten entstehen können.

**Beispiel 3.44.** Es sei das Maß  $\mu = \lambda|_{[a,b]} + \nu$  auf  $\mathbb{R}$  gegeben, wobei  $\lambda|_{[a,b]}$  das Lebesgue-Maß auf dem Intervall  $[a, b]$  und  $\nu$  ein singuläres Maß auf  $[a, b]$  ist. Weiterhin sei  $A$  der Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , d. h. das singuläre Spektrum  $\sigma_s(A)$  ist nicht leer und liegt im Intervall  $[a, b]$ .

Für den gestörten Operator  $A_\alpha$  ist dagegen das singulär stetige Spektrum  $\sigma_{sc}(A)$  verschwunden und das reine Punktspektrum kann nur außerhalb von  $[a, b]$  liegen und zwar für jedes  $\alpha \neq 0$ .

Dies folgt aus einer leichten Rechnung, welche  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} F(t + i\varepsilon) \geq \pi/2$  für  $t \in [a, b]$  zeigt, sodass immer  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(t + i\varepsilon) \neq -1/\alpha$  gilt. Dass  $G(t) < \infty$  für  $t \notin [a, b]$  gilt, ist offensichtlich.



## 4. Riccati-Gleichung

In diesem Abschnitt soll die *Operator-Riccati-Gleichung* vorgestellt werden und wir folgen dabei im Wesentlichen [KMM03] und [LR95]. Wir werden sehen, dass die Operator-Riccati-Gleichung und deren Lösungen mit invarianten Unterräumen des betreffenden Operators zusammenhängen.

Die Namensgebung steht hier in Analogie zur besser bekannten *Riccati-Gleichung* in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, da auch für die Operator-Riccati-Gleichung die gesuchte Lösung sowohl linear als auch quadratisch in die Gleichung eingeht. Die Bezeichnung ehrt den italienischen Mathematiker *Jacopo Francesco Riccati*, welcher von 1676 bis 1754 in der damaligen Republik Venedig lebte. Sein Hauptinteresse lag im Lösen von Differentialgleichungen und es sind seine Aufzeichnungen und Briefe, in denen das erste Auftreten der nach ihm benannten Differentialgleichung dokumentiert ist (vgl. [Bit91]).

### 4.1. Unbeschränkte Operatoren

Da wir in diesem Abschnitt auch unbeschränkte Operatoren betrachten müssen, stellen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze zusammen.

**Definition 4.1.** Es seien  $X, Y$  zwei normierte Räume und  $\mathcal{D} \subseteq X$  ein linearer Unterraum. Eine lineare Abbildung  $A : X \supseteq \mathcal{D} \rightarrow Y$  heißt ein *linearer Operator mit Definitionsbereich  $\mathcal{D}$* .

Liegt der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  dicht in  $X$ , so heißt der Operator *dicht definiert*. Ist die Operatornorm von  $A$  nicht endlich, so heißt der Operator *unbeschränkt*. Für den Definitionsbereich eines Operators  $A$  schreiben wir ab sofort  $\text{Dom}(A)$ .

Unbeschränkte Operatoren sind also auch unstetig in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches. Eine Abschwächung der Stetigkeit ist der Begriff der Abgeschlossenheit eines Operators, den wir nun definieren möchten.

**Definition 4.2.** Es sei  $A$  ein linearer Operator zwischen zwei Banachräumen  $X, Y$  mit Definitionsbereich  $\text{Dom}(A)$ .

Der Operator  $A$  heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph

$$G(A) := \{(x, Ax) \mid x \in \text{Dom}(A)\} \quad (4.1)$$

eine abgeschlossene Menge in  $X \times Y$  bezüglich der Norm  $\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$  ist.

Der Operator  $A$  heißt *abschließbar*, wenn es einen weiteren linearen Operator  $\overline{A}$  gibt, der  $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$  erfüllt. Der abgeschlossene Operator  $\overline{A}$  heißt dann *der Abschluss von  $A$* .

Für abgeschlossene bzw. abschließbare Operatoren gibt es weitere Charakterisierungen, welche wir kurz vorstellen möchten.

**Satz 4.3.** *Es sei  $A$  ein linearer Operator zwischen zwei Banachräumen  $X, Y$  mit Definitionsbereich  $\text{Dom}(A)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1)  *$A$  ist abgeschlossen.*
- (2) *Für alle konvergenten Folgen  $(x_n) \subseteq \text{Dom}(A)$  mit Grenzwert  $x \in X$  und mit  $Ax_n \rightarrow y \in Y$  gilt sowohl  $x \in \text{Dom}(A)$  als auch  $Ax = y$ .*
- (3) *Der normierte Raum  $(\text{Dom}(A), \|\cdot\|_A)$  ist vollständig. Dabei ist die betrachtete Norm  $\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$  die sogenannte Graphennorm.*

*Ebenfalls sind äquivalent:*

- (1)  *$A$  ist abschließbar.*
- (2) *Für alle Nullfolgen  $(x_n) \subseteq \text{Dom}(A)$  mit  $Ax_n \rightarrow y \in Y$  gilt schon  $y = 0$ .*
- (3) *Es gibt eine abgeschlossene Fortsetzung von  $A$ , d. h. einen abgeschlossenen Operator  $B$  mit Definitionsbereich  $\text{Dom}(B) \supseteq \text{Dom}(A)$  und  $B|_{\text{Dom}(A)} = A$ .*

*Beweis.* Beweise sind in vielen Funktionalanalysis-Büchern zu finden. Siehe zum Beispiel [Sch12, Proposition 1.5.].  $\square$

Direkt aus dem Folgenkriterium für abgeschlossene Operatoren lässt sich der nachstehende Satz ableiten.

**Satz 4.4.** *Es seien  $X, Y$  Banachräume und  $A : X \supseteq \text{Dom}(A) \rightarrow Y$  ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist der Kern des Operators*

$$\text{Kern } A := \{x \in \text{Dom}(A) \mid Ax = 0\} \quad (4.2)$$

*ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ .*

Nun bringen wir ein wichtiges Beispiel eines nichtabschließbaren Operators:

**Satz 4.5.** *Es sei  $X$  ein komplexer Banachraum und  $\varphi : X \supseteq \text{Dom}(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$  ein unbeschränktes lineares Funktional mit Definitionsbereich  $\text{Dom}(\varphi)$ . Dann ist  $\varphi$  nicht abschließbar.*

*Beweis.* Da  $\varphi$  überall unstetig ist, kann man eine Nullfolge  $(x_n) \subseteq X$  so wählen, dass  $(\varphi(x_n))$  nicht gegen Null konvergiert. Dies bedeutet, dass es eine Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  derart gibt, dass die Folge  $(\varphi(x_{n_k}))_k$  nur nichtverschwindende Glieder hat und sich auch nicht in der Null häuft. Wir definieren nun die Folge  $z_k := x_{n_k} / \varphi(x_{n_k})$ , die offensichtlich eine Nullfolge ist und  $\varphi(z_k) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt. Nach dem Folgenkriterium in Satz 4.3 ist  $\varphi$  somit nicht abschließbar.  $\square$

Der nächste Satz verallgemeinert dieses Resultat auf alle Operatoren zwischen Banachräumen, die ein endlichdimensionales Bild besitzen. Solche Operatoren nennt man üblicherweise *Operatoren von endlichem Rang*.

**Satz 4.6.** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $A : X \supseteq \text{Dom}(A) \rightarrow Y$  ein unbeschränkter linearer Operator von endlichem Rang, d. h.  $\text{Bild } A$  ist ein endlichdimensionaler Unterraum von  $Y$ . Dann ist  $A$  nicht abschließbar.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass der Operator  $A$  abschließbar wäre, d. h. es gibt eine abgeschlossene Fortsetzung  $B : X \supseteq \text{Dom}(B) \rightarrow Y$ , welche das gleiche endlichdimensionale Bild wie  $A$  besitzt. Der Kern von  $B$  ist nach Satz 4.4 abgeschlossen, sodass die Abbildung

$$\tilde{B} : \text{Dom}(B)/\text{Kern}(B) \rightarrow \text{Bild}(B),$$

definiert durch  $\tilde{B}([x]) := B(x)$  einen Isomorphismus zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen darstellt. Aus diesem Grund ist die Abbildung  $\tilde{B}$  auch stetig. Nun kann man leicht nachrechnen, dass die Operatornormen übereinstimmen, d. h. es gilt  $\|B\| = \|\tilde{B}\| < \infty$ . Der Operator  $B$  ist demnach beschränkt und somit muss auch  $A$  als Einschränkung beschränkt sein. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung an  $A$ .  $\square$

Da der Beweis des obigen Satzes die Abgeschlossenheit des Kerns benutzt, erhalten wir leicht Folgendes:

**Korollar 4.7.** *Es seien  $X$  und  $Y$  komplexe Banachräume. Ist  $A : X \supseteq \text{Dom}(A) \rightarrow Y$  ein unbeschränkter linearer Operator von endlichem Rang, so ist der Kern von  $A$  nicht abgeschlossen. Insbesondere ist für ein dicht definiertes, unbeschränktes lineares Funktional  $\varphi : X \supseteq \text{Dom}(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$  der Kern dicht in  $X$ .*

Nun betrachten wir einen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  und erinnern an das Funktionalkalkül aus dem letzten Kapitel. Dort wurde für einen beschränkten selbstadjungierten Operator  $A$  und eine beschränkte messbare Funktion  $f$  ein beschränkter Operator  $f(A)$  definiert. Wir dehnen die Situation nun auf unbeschränkte Funktionen aus und erhalten somit auch einen unbeschränkten Operator.

**Definition 4.8.** Es sei  $\mathfrak{H}$  ein komplexer Hilbertraum,  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  selbstadjungiert und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion, aber nicht notwendigerweise beschränkt. Dann definieren wir den dichten Unterraum

$$D_f := \left\{ x \in \mathfrak{H} \mid \int |f(t)|^2 d\langle x, E_A(t)x \rangle < \infty \right\} \quad (4.3)$$

und einen möglicherweise unbeschränkten Operator  $f(A)$  mit Definitionsbereich  $D_f$  durch die Forderung, dass dieser

$$\langle y, f(A)x \rangle = \int f(t) d\langle y, E_A(t)x \rangle \quad (4.4)$$

für alle  $x \in D_f$  und  $y \in \mathfrak{H}$  erfüllt. Man schreibt auch  $\text{Dom}(f(A))$  für den Definitionsbereich  $D_f$  und  $\int f(t) dE_A(t)$  für den Operator  $f(A)$ .

Man beachte, dass durch die Gleichung (4.4) das Element  $f(A)x \in \mathfrak{H}$  definiert wird. Wir fassen demnach  $\int f(t) dE_A(t)$  nicht wie früher als Integration bezüglich eines Spektralmaßes auf, sondern notieren damit nur den oben definierten unbeschränkten Operator. Vergleiche dazu auch [Wer05, Theorem VII.3.2].

## 4.2. Operator-Riccati-Gleichung

In diesem Abschnitt steht  $\mathfrak{H}$  immer für einen separablen Hilbertraum und alle auftretende Operatoren sind linear, jedoch nicht notwendigerweise beschränkt oder abschließbar.

**Voraussetzung 4.9.** *Der Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  sei orthogonal zerlegt in zwei abgeschlossene Unterräume*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 . \quad (4.5)$$

*Es sei  $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein selbstadjungierter Operator, der bezüglich der obigen Zerlegung als Blockoperator dargestellt werden kann:*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_0 & V \\ V^* & A_1 \end{pmatrix} . \quad (4.6)$$

*Dabei sind  $A_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$  und  $A_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$  beschränkte selbstadjungierte Operatoren und  $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_0)$  ein beschränkter Operator.*

Unter dieser Voraussetzung verstehen wir unter der *Riccati-Gleichung* folgende mit dem Blockoperator  $\mathbf{B}$  assoziierte Gleichung :

$$A_1 X - X A_0 - X V X + V^* = 0 . \quad (4.7)$$

Dabei steht  $X$  für einen dicht definierten, möglicherweise unbeschränkten Operator von  $\mathfrak{H}_0$  nach  $\mathfrak{H}_1$  und bezeichnet die *Lösung der Riccati-Gleichung*. Für beschränkte Lösungen  $X$  ist (4.7) als Operatoridentität zu verstehen, andererseits muss man für unbeschränkte Lösungen einen verallgemeinerten Lösungsbegriff einführen:

**Definition 4.10.** Ein dicht definierter, möglicherweise unbeschränkter, linearer Operator  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  heißt *starke Lösung* der Riccati-Gleichung, wenn

$$\text{Bild}(A_0 + V X)|_{\text{Dom}(X)} \subseteq \text{Dom}(X) \quad (4.8)$$

und

$$A_1 X x - X(A_0 + V X)x + V^* x = 0 \quad \text{für alle } x \in \text{Dom}(X) \quad (4.9)$$

gilt.

Wir nennen einen dicht definierten Operator  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  dagegen eine *schwache Lösung* der Riccati-Gleichung, falls der Operator abgeschlossen ist und

$$\langle y, A_1 X x \rangle - \langle X^* y, A_0 x \rangle - \langle X^* y, V X x \rangle + \langle y, V^* x \rangle = 0 \quad (4.10)$$

für alle  $y \in \text{Dom}(X^*)$  und  $x \in \text{Dom}(X)$  erfüllt.

Die obige Definition findet man in dieser Art in [KMM03]. Ebenfalls wird dort das folgende Theorem bewiesen, welches die Äquivalenz der beiden Lösungsbegriffe zeigt, wenn man abgeschlossene Operatoren betrachtet.

**Theorem 4.11.** *Es gelte Voraussetzung 4.9 und  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  sei ein dicht definierter und abgeschlossener Operator. Dann ist  $X$  genau dann eine starke Lösung der Riccati-Gleichung, wenn  $X$  eine schwache Lösung ist.*

*Beweis.* Wir wählen  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \longrightarrow \mathfrak{H}_1$  als dicht definierten, abgeschlossenen Operator.

Nehmen wir an, dass  $X$  eine starke Lösung der Riccati-Gleichung ist. Dann gilt für alle  $x \in \text{Dom}(X)$  und  $y \in \text{Dom}(X^*)$  die Gleichung:

$$\langle y, A_1 X x - X(A_0 + V X)x + V^* x \rangle = 0$$

Daraus folgt direkt, dass auch (4.10) erfüllt ist, sodass  $X$  eine schwache Lösung der Riccati-Gleichung ist.

Ist andererseits  $X$  eine schwache Lösung und  $x \in \text{Dom}(X)$ , so können wir die Gleichung (4.10) folgendermaßen ausdrücken:

$$\langle y, A_1 X x + V^* x \rangle = \langle X^* y, A_0 x + V X x \rangle .$$

Aus dieser Gleichung folgt direkt mit der Definition des adjungierten Operators, dass  $(A_0 + V X)x \in \text{Dom}(X^{**})$  gilt. Da  $X$  nun ein abgeschlossener Operator ist, gilt  $X^{**} = \overline{X} = X$  und daraus folgt gemäß obiger Gleichung:

$$(A_0 + V X)x \in \text{Dom}(X) \quad \text{und} \quad A_1 X x + V^* x = X(A_0 x + V X)x .$$

Dies bedeutet, dass  $X$  eine starke Lösung der Riccati-Gleichung ist.  $\square$

Betrachtet man den Blockoperator  $\mathbf{B}$  mit unbeschränkten Einträgen, so ist es sinnvoll noch andere Lösungsbegriffe zu betrachten. Da in dieser Arbeit alle Koeffizienten beschränkte Operatoren darstellen, werden wir hauptsächlich den oben definierten Begriff der starken Lösung verwenden. Wir werden gleich zeigen, dass die starken Lösungen der Riccati-Gleichung mit gewissen  $\mathbf{B}$ -invarianten Unterräumen zusammenhängen. Diese wollen wir nun definieren.

**Definition 4.12** (Graphen-Unterraum). Es sei  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  ein dicht definierter Operator. Der lineare Unterraum des Hilbertraumes  $\mathfrak{H}$ , gegeben durch

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X) := \{x \in \mathfrak{H} \mid x = x_0 \oplus X x_0, x_0 \in \text{Dom}(X)\} , \quad (4.11)$$

heißt der *Graphen-Unterraum von  $\mathfrak{H}$  bezogen auf  $(\mathfrak{H}_0, X)$* . Wir werden abkürzend von dem *Graphen von  $X$*  sprechen.

Betrachten wir analog einen dicht definierten Operator  $Y : \mathfrak{H}_1 \supseteq \text{Dom}(Y) \rightarrow \mathfrak{H}_0$ , so verstehen wir unter dem *Graphen-Unterraum von  $\mathfrak{H}$  bezogen auf  $(\mathfrak{H}_1, Y)$*  den Unterraum

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, Y) := \{x \in \mathfrak{H} \mid x = Y x_1 \oplus x_1, x_1 \in \text{Dom}(Y)\} . \quad (4.12)$$

Auch hier werden wir kurz von dem *Graphen von  $Y$*  sprechen.

Man beachte, dass die Definition des Graphen-Unterraums mit der Identifizierung  $\mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  genau dem Graphen  $G(X)$  aus Definition 4.2 entspricht. Demnach ist für einen abgeschlossenen Operator der Graphenunterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)$  abgeschlossen und es gilt sogar

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)^\perp = \mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X^*) .$$

Nun zeigen wir den Zusammenhang zwischen Lösungen der Riccati-Gleichung und den zugeordneten Graphenräumen.

**Theorem 4.13.** *Wir nehmen Voraussetzung 4.9 an. Es sei  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  ein dicht definierter Operator, welcher nicht notwendigerweise beschränkt oder abgeschlossen sein muss. Dann ist der Operator  $X$  genau dann eine starke Lösung der Riccati-Gleichung, wenn der Graphen-Unterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)$  invariant unter dem Operator  $\mathbf{B}$  ist.*

*Beweis.* Der Beweis ist in [KM05] zu finden und überraschend kurz:

Der Graph von  $X$  ist genau dann invariant unter dem Operator  $\mathbf{B}$ , wenn

$$\mathbf{B}(x \oplus Xx) = (A_0x + VXx) \oplus (V^*x + A_1Xx) \in \mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)$$

für alle  $x \in \text{Dom}(X)$  gilt. Diese Bedingung ist indessen genau dann erfüllt, wenn sowohl  $(A_0 + VX)x \in \text{Dom}(X)$  als auch  $V^*x + A_1Xx = X(A_0x + VXx)$  für alle  $x \in \text{Dom}(X)$  erfüllt ist.  $\square$

In Kapitel 5 werden wir Lösungen der Riccati-Gleichung unter Annahme eines endlichdimensionalen Hilbertraumes  $\mathfrak{H}_1$  konstruieren. Das obige Theorem besagt, dass zum Beispiel Eigenräume zu Eigenwerten des Operators  $\mathbf{B}$  als Ausgangspunkt für die Konstruktion angenommen werden können. Man versucht demnach einen  $\mathbf{B}$ -invarianten Unterraum zu konzipieren und zeigt dann, dass es sich um einen Graphenunterraum handelt, um so eine starke Lösung der Riccati-Gleichung zu finden.

Nun möchten wir hier ein kurzes Beispiel demonstrieren, in dem beide Hilberträume unendlichdimensional sind. Dieses findet sich in dieser Form in [KMM03] und zeigt die Existenz von unbeschränkten Lösungen.

**Beispiel 4.14.** Es sei der Hilbertraum  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  durch  $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 = L^2((0, 1))$  gegeben. Weiterhin sei  $M$  der Multiplikationsoperator auf  $L^2((0, 1))$ , d. h. es gilt

$$(Mf)(t) = t f(t) \tag{4.13}$$

für  $t \in (0, 1)$  fast überall. Der selbstadjungierte Operator  $\mathbf{B}$  sei bezüglich obiger Zerlegung gegeben durch

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -M & M^2 \\ M^2 & M \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Somit schreibt sich die Riccati-Gleichung für diesen Fall:

$$MX + XM - XM^2X + M^2 = 0. \tag{4.15}$$

Um Lösungen zu finden nehmen wir als Ansatz einen Multiplikationsoperator mit einer messbaren Funktion  $g$  an, denn dann ergibt sich für letztere die Gleichung

$$(-t^2(g(t))^2 + 2tg(t) + t^2) f(t) = 0 \quad \text{f. ü.} \tag{4.16}$$

Diese wird von der unbeschränkten Funktion  $g(t) = -\frac{1}{t} \left(1 + \sqrt{1 + t^2}\right)$  erfüllt, sodass wir eine unbeschränkte starke Lösung der Riccati-Gleichung gefunden haben.

In der Veröffentlichung [KMM03] beschreiben V. Kostykin, K. A. Makarov und A. K. Motovilov ein geometrisches Kriterium für die Existenz von starken Lösungen der Riccati-Gleichung. Insbesondere geben sie eine Bedingung an, wann ein

**B**-invarianter Unterraum ein Graphenunterraum zu einer unbeschränkten Lösung darstellt.

Das nächste Theorem entnehmen wir eben dieser Veröffentlichung. Es charakterisiert Graphenunterräume mit Hilfe orthogonaler Projektionen.

**Theorem 4.15.** *Der Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  sei orthogonal zerlegt in zwei abgeschlossenen Unterräumen*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$$

und es sei  $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  die orthogonale Projektion auf  $\mathfrak{H}_0$ . Weiterhin sei  $U$  ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathfrak{H}$  und  $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  die orthogonale Projektion auf diesen. Dann ist der Unterraum  $U$  genau dann ein Graphenunterraum zu einem dicht definierten abgeschlossenen Operator  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$ , wenn

$$\begin{aligned} \{x \in \mathfrak{H} \mid Px = x, Qx = 0\} &= \{0\} \\ \{x \in \mathfrak{H} \mid Px = 0, Qx = x\} &= \{0\} \end{aligned}$$

*gilt.*

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Theorem 3.2 aus [KMM03].  $\square$

Eine Anwendung dieses Theorems ist der folgende Satz, welchen wir [KM05] entnehmen. Dieser beschreibt eine besondere Eigenschaft eines Graphenunterraumes, welcher zu einem nichtabschließbaren Operator gehört.

**Satz 4.16.** *Es sei  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  in zwei abgeschlossene Unterräume orthogonal zerlegt und  $X : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  ein dicht definierter und nichtabschließbarer Operator, d. h.  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$  ist ein abgeschlossener Unterraum, aber kein Graphenunterraum mehr. Dann enthält  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$  ein nichtverschwindendes Element orthogonal zum Raum  $\mathfrak{H}_0$ .*

*Beweis.* Wir verwenden hier die Ideen von [KM05, Proposition 2.1].

Nehmen wir an, dass sowohl  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$  kein nichtverschwindendes Element orthogonal zu  $\mathfrak{H}_0$  enthält als auch umgekehrt  $\mathfrak{H}_0$  kein nichtverschwindendes Element orthogonal zu  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$  enthält. Dann folgt aus Theorem 4.15, dass  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$  der Graphenunterraum eines abgeschlossenen Operators ist. Dies würde also bedeuten, dass  $X$  abschließbar ist, was der Voraussetzung widerspricht.

Nehme wir nun an, dass die zweite Möglichkeit zutrifft, d. h. es gibt ein  $x_0 \in \mathfrak{H}_0$  orthogonal zu  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$ . Daraus folgt

$$\langle x_0 \oplus 0, x \oplus Xx \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle x_0, x \rangle_{\mathfrak{H}_0} = 0 \quad \text{für alle } x \in \text{Dom}(X).$$

Da  $\text{Dom}(X)$  eine dichte Menge ist, folgt somit auch  $x_0 \perp \mathfrak{H}_0$ , d. h.  $x_0 = 0$ .

Somit kann nur die erste Möglichkeit eintreten und dies bedeutet, dass es ein Element  $0 \neq y \in \overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X)}$  gibt mit  $y \perp \mathfrak{H}_0$   $\square$

Theorem 5.3 in [KMM03] beschäftigt sich mit sogenannten spektralen Unterräumen und zeigt den Zusammenhang mit schwachen Lösungen der Riccati-Gleichung und deren Verhalten im topologischen Raum aller Lösungen. Wir werden uns in diesem Zusammenhang auf die beschränkten Lösungen konzentrieren, sodass das Theorem folgende leicht verständliche Form annimmt.

**Theorem 4.17.** *Es gelte Voraussetzung 4.9. Wir schreiben  $\mathcal{X}_b$  für die Menge aller beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung. Wir fassen  $\mathcal{X}_b \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1)$  mit der Operatornorm als topologischen Raum auf.*

*Dann ist ein Operator  $X \in \mathcal{X}_b$  genau dann ein isolierter Punkt, wenn es eine Borelmenge  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X) = \text{Bild } E_{\mathbf{B}}(\Delta)$  gibt.*

*Beweis.* Wir verweisen auf den Beweis in [KMM03, Theorem 5.3]. □

### 4.3. Algebraische Riccati-Gleichung

Betrachten wir die Voraussetzung 4.9 unter der Annahme, dass der zu betrachtende Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  endlichdimensional ist, so spricht man meistens von der algebraischen Riccati-Gleichung, wenn man die Gleichung (4.7) als Identität für Matrizen ansieht. Man vergleiche dazu die Monographie [LR95].

Selbstverständlich bleiben alle Sätze aus dem vorherigen Abschnitt bestehen und es genügt beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung zu betrachten. Für diesen endlichdimensionalen Fall möchten wir den Begriff der Riccati-Gleichung ausdehnen:

**Voraussetzung 4.18.** *Der komplexe Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  sei endlichdimensional und orthogonal zerlegt in zwei abgeschlossene Unterräume*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 . \quad (4.17)$$

*Es sei  $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  ein Operator, der bezüglich der o. g. Zerlegung als Blockoperator dargestellt werden kann:*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_0 & V \\ W & A_1 \end{pmatrix} . \quad (4.18)$$

*Dabei sind  $A_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ ,  $A_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$ ,  $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_0)$  und  $W \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1)$  beschränkte Operatoren. Wir identifizieren immer  $\mathfrak{H}_0 = \mathbb{C}^m$  und  $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^n$  und fassen alle Operatoren als Matrizen auf.*

Unter dieser Voraussetzung verstehen wir unter der *algebraischen Riccati-Gleichung* folgende mit dem Blockoperator  $\mathbf{B}$  assoziierte Gleichung:

$$A_1 X - X A_0 - X V X + W = 0 . \quad (4.19)$$

Man beachte, dass die einzige Änderung zum vorherigen Abschnitt ist, dass wir auf jegliche Selbstadjungiertheit verzichten. Das wichtige Resultat aus dem letzten Abschnitt, welches die Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen  $\mathbf{B}$ -invarianten Graphen-Unterräumen und Lösungen der Riccati-Gleichung beschreibt, vgl. Theorem 4.13, bleibt allerdings auch in dieser Situation bestehen.

Wir haben diesen größeren Rahmen für die algebraischen Riccati-Gleichung gewählt, um zu zeigen, dass unter diesen Bedingungen kein allgemeiner Existenzsatz für beschränkte Lösungen gelten kann. In der Tat ist die Situation sogar noch vielschichtiger, da es vorkommen kann, dass keine Lösungen existieren, selbst wenn es  $\mathbf{B}$ -invariante Unterräume gibt. Das folgende einfache Beispiel demonstriert dies. Wir entnehmen es [LR95, Example 7.1.1].

**Beispiel 4.19.** Es sei der komplexe Hilbertraum  $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$  gegeben und der lineare Operator  $\mathbf{B} : \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$  als folgende Blockmatrix definiert:

$$\mathbf{B} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Die algebraische Riccati-Gleichung assoziiert zur Blockmatrix  $\mathbf{B}$  lautet in diesem Fall

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung hat offensichtlich keine Lösung. Ungeachtet dessen ist der Unterraum  $\mathbb{C} \oplus 0 \oplus \mathbb{C} \oplus 0$  ein zweidimensionaler  $\mathbf{B}$ -invarianter Unterraum, aber aufgrund der verschwindenden zweiten Komponente kein Graphen-Unterraum.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass die Riccati-Gleichung im selbstadjungierten Fall (4.7), d. h. wir nehmen  $A_0$  und  $A_1$  als selbstadjungierte Operatoren an und setzen  $W = V^*$ , unter gewissen Voraussetzungen immer Lösungen besitzt.

Wenn der Hilbertraum endlichdimensional ist, so garantiert die Bedingung, dass die Spektren von  $A_0$  und  $\mathbf{B}$  disjunkt sind, die Existenz von beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung. Man vergleiche dazu das Korollar 5.5 im nächsten Abschnitt.



## 5. Endlichdimensionale Störungen und Lösungen der Riccati-Gleichung

Dieses Kapitel befasst sich mit einer speziellen Störung eines selbstadjungierten Operators durch einen Operator von endlichem Rang. Wir werden das singuläre Spektrum des gestörten Operators durch einen minimalen Träger charakterisieren und dieses in Verbindung zu Lösungen der Operator-Riccati-Gleichung bringen.

Mit Hilfe des Punktspektrums des gestörten Operators werden wir beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung konstruieren und somit die Existenz von Lösungen für einen endlichdimensionalen Hilbertraum unter gewissen Voraussetzungen beweisen.

Den Inhalt dieses Kapitels möchte ich als Eigenleistung herausstellen. Die einzige Ausnahme bildet der Abschnitt über die eindimensionale Störung, welcher ursprünglich von V. Kostrykin und K. Markarov in [KM05] veröffentlicht wurde und als wesentliche Grundlage für das ganze Kapitel dient. Die Darstellung hier unterscheidet sich hingegen ein wenig von der ursprünglichen Form in [KM05], da wir einerseits die eindimensionale Störung als Spezialfall behandeln und wir andererseits etliche Details ausarbeiten werden.

Die Zerlegung des Hilbertraumes und des Operators ist wie in Kapitel 4 zu verstehen. Zur besseren Übersicht fassen wir jedoch die Voraussetzungen für diesen Abschnitt nochmals zusammen.

**Generalvoraussetzung 5.1.** *Es sei  $\mathbf{A}$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf dem komplexen separablen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$  ein abgeschlossener  $\mathbf{A}$ -invarianter Unterraum. Wir setzen  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0^\perp$  und definieren die selbstadjungierten Operatoren  $A_i := \mathbf{A}|_{\mathfrak{H}_i}$  für  $i = 0, 1$ . Der beschränkte selbstadjungierte Störungsoperator  $\mathbf{V} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  soll bezüglich der Zerlegung*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$$

*nebendiagonal wirken, d. h.  $\text{Bild}(\mathbf{V}|_{\mathfrak{H}_0}) \subseteq \mathfrak{H}_1$  und  $\text{Bild}(\mathbf{V}|_{\mathfrak{H}_1}) \subseteq \mathfrak{H}_0$ . Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir den als Blockmatrix dargestellten selbstadjungierten Operator*

$$\mathbf{B} := \mathbf{A} + \mathbf{V} = \begin{pmatrix} A_0 & V \\ V^* & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V^* & 0 \end{pmatrix},$$

*wobei  $V$  ein beschränkter Operator von  $\mathfrak{H}_1$  nach  $\mathfrak{H}_0$  ist.*

*Wir nehmen zusätzlich an, dass der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  endlichdimensional ist, d. h. wir können diesen folgendermaßen identifizieren:*

$$\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^n.$$

*Das Bild des Operators  $V$  sei ein zyklischer Unterraum für  $A_0$ , d. h.*

$$\text{lin span} \left\{ A_0^k v \mid v \in \text{Bild } V, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

liegt dicht im Hilbertraum  $\mathfrak{H}_0$ .

Die zum Blockoperator  $\mathbf{B}$  assoziierte Riccati-Gleichung lautet

$$A_1X - XA_0 - XVX + V^* = 0. \quad (5.1)$$

Die oben genannte Generalvoraussetzung ist für das ganze Kapitel 5 gültig und wird deswegen nicht mehr zusätzlich in Formulierung erwähnt.

Unter der Annahme  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$  haben V. Kostrykin und K. Makarov in [KM05] einen minimalen Träger des singulären Anteils des Spektralmaßes von  $\mathbf{B}$  gefunden, der eine einparametrische Familie von Lösungen der Riccati-Gleichung charakterisiert.

In dieser Arbeit wird der allgemeine Fall  $\dim \mathfrak{H}_1 = n \in \mathbb{N}$  betrachtet und es wird ebenfalls ein minimaler Träger für den singulären Anteil des Spektralmaßes von  $\mathbf{B}$  angegeben. Wir finden heraus, dass dieser in ähnlicher Art wie im Fall  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$  als Hilfsmittel für das Auffinden von Lösungen der Riccati-Gleichung genutzt werden kann.

### 5.1. Ziele und Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Hauptergebnisse der Arbeit vorgestellt und es wird für diese durchgehend die Generalvoraussetzung 5.1 angenommen. Es sei nachdrücklich betont, dass wir niemals fordern, dass die Spektren von  $A_0$  und  $A_1$  getrennt sind, d. h. es muss keine Spektrallücke existieren. Wir wollen dagegen oft Forderungen an das Spektrum des gestörten Operators  $\mathbf{B}$  stellen, um zum Beispiel die Existenz von Lösungen der Riccati-Gleichung zu garantieren.

Wir werden in den folgenden Abschnitten detailliert die niedrigen Dimensionen  $n = 1$  und  $n = 2$  untersuchen und letztendlich folgendes Theorem beweisen:

**Theorem 5.2.** *Ist die Störung  $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_0)$  ein Operator vom Rang Eins, d. h. Bild  $V$  ist eindimensional, so gelten folgende Aussagen:*

Für  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$  gilt:

- (a) *Das Spektrum von  $\mathbf{B}$  ist immer einfach. Darüber hinaus, können Eigenwerte von  $A_0$  keine Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  sein. Das absolut stetige Spektrum bleibt unter der Störung invariant und das singulär stetige Spektrum bleibt unabhängig von der Störung beschränkt. Es gilt  $\sigma_{sc}(A_0) \cup \sigma_{ac}(A_0) \supseteq \sigma_{sc}(\mathbf{B})$ .*
- (b) *Ist das singuläre Spektrum von  $\mathbf{B}$  nicht leer, so existieren immer starke Lösungen der Riccati-Gleichung. Demzufolge ist die Existenz von Lösungen gesichert, wenn  $\mathfrak{H}$  endlichdimensional ist.*

Für  $\dim \mathfrak{H}_1 = 2$  gilt:

- (c) *Falls  $A_1$  ein einfaches Spektrum besitzt und Bild  $V^*$  ein zyklischer Unterraum für  $A_1$  ist, so liegt auch für  $\mathbf{B}$  ein einfaches Spektrum vor.*
- (d) *Besteht das Punktspektrum von  $\mathbf{B}$  mit Vielfachheiten gezählt aus mindestens drei Elementen, so existiert eine beschränkte Lösung der Riccati-Gleichung.*

*Beweis.* Siehe Abschnitt 5.5 und Abschnitt 5.6. □

Insbesondere können wir für  $n \leq 2$  den folgenden Existenzsatz für beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung im rein endlichdimensionalen Fall angeben.

**Korollar 5.3.** *Falls der Hilbertraum  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  endlichdimensional ist,  $\dim \mathfrak{H}_1 \leq 2$  und  $\dim \text{Bild } V = 1$  gilt, so hat die Riccati-Gleichung mindestens eine beschränkte Lösung.*

Betrachtet man nun beliebige Störungen und beliebige endliche Dimensionen des Hilbertraumes  $\mathfrak{H}_1$ , so werden wir folgende Aussagen über Lösungen der Riccati-Gleichung beweisen.

**Theorem 5.4.** *Es gelten folgende Aussagen:*

- (a) *Das Spektrum von  $\mathbf{B}$  hat maximal die Multiplizität  $n = \dim \mathfrak{H}_1$ .*
- (b) *Wenn es einen Eigenwert von  $\mathbf{B}$  mit maximaler Vielfachheit  $n = \dim \mathfrak{H}_1$  gibt, so hat die Riccati-Gleichung mindestens eine beschränkte Lösung.*
- (c) *Wir setzen voraus, dass die Differenz der Punktspektren  $\sigma_p(\mathbf{B}) \setminus \sigma_p(A_0)$  mit Vielfachheiten gezählt aus mindestens  $n$  Elementen besteht und die zugehörigen Eigenvektoren zusammen mit  $\mathfrak{H}_0 \oplus 0 \subseteq \mathfrak{H}$  den endlichdimensionalen Hilbertraum  $0 \oplus \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$  aufspannen. Dann hat die Riccati-Gleichung (5.1) mindestens eine beschränkte Lösung.*

*Beweis.* Siehe Lemma 5.12, Abschnitt 5.7 und Abschnitt 5.8. □

Insbesondere resultiert aus diesem Theorem die folgende Existenzaussage für Lösungen der Riccati-Gleichung im endlichdimensionalen Fall.

**Korollar 5.5.** *Falls der gesamte Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  endlichdimensional ist und die Spektren von  $\mathbf{B}$  und  $A_0$  disjunkt sind, so hat die Riccati-Gleichung mindestens eine beschränkte Lösung.*

*Beweis.* Ist der Hilbertraum endlichdimensional, so gibt es eine Basis aus Eigenvektoren von  $\mathbf{B}$  und Teil (c) in Theorem 5.4 liefert die Behauptung. □

Das Hauptresultat aus [KM05] beschreibt für den Fall, dass  $\dim \mathfrak{H}_1$  eindimensional ist, die Existenz einer einparametrischen Familie von nichtabgeschlossenen invarianten Teilräumen des Operators  $\mathbf{B}$ , wenn das singular stetige Spektrum von  $\mathbf{B}$  nicht leer ist. Dieses Ergebnis kann unter zusätzlichen Voraussetzungen auch auf den Fall ausgedehnt werden, dass  $\dim \mathfrak{H}_1$  beliebige endliche Dimension besitzt.

**Theorem 5.6.** *Es sei  $n = \dim \mathfrak{H}_1 \in \mathbb{N}$  und  $S_{pp}$  die Menge der Eigenwerte von  $\mathbf{B}$ . Dann existiert ein minimaler Träger  $S_s$  des singulären Anteils des Spektralmaßes von  $\mathbf{B}$  derart, dass*

$$\tilde{S}_s := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Es existiert ein } y_\lambda \in \mathfrak{H}_1 \setminus \{0\} \text{ mit} \right. \\ \left. (A_1 - \lambda)y_\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} V y_\lambda \right\} \quad (5.2)$$

eine Teilmenge von  $S_s$  ist, die zur Konstruktion von starken Lösungen der Riccati-Gleichung benutzt werden kann. Wir schreiben  $K_{pp} := \tilde{S}_s \cap S_{pp}$  für die Menge der Eigenwerte und  $K_{sc} := \tilde{S}_s \setminus S_{pp}$ .

Ist  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq \tilde{S}_s$  ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen, die so gewählt sind, dass die nach Gleichung (5.2) ausgewählten Vektoren  $(y_{\lambda_1}, \dots, y_{\lambda_n})$  linear unabhängig sind, so schreiben wir

$$\Lambda := ((\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n}))$$

und es gilt:

- (a) Es gibt einen dicht definierten Operator  $X_\Lambda : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X_\Lambda) \rightarrow \mathfrak{H}_1$ , der eine starke Lösung der Riccati-Gleichung (5.1) ist.
- (b) Gibt es ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\lambda_k \in K_{sc}$ , so ist der Unterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda)$  nicht abgeschlossen in  $\mathfrak{H}$ , wobei  $X_\Lambda : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X_\Lambda) \rightarrow \mathfrak{H}_1$  ein nicht-abgeschlossener dicht definierter Operator ist, der eine starke Lösung der Riccati-Gleichung ist.
- (c) Gilt  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$ , so ist  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda)$  ein abgeschlossener Unterraum der Kodimension  $n$  in  $\mathfrak{H}$ , wobei  $X_\Lambda : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1$  ein beschränkter Operator ist, welcher die Riccati-Gleichung löst.
- (d) Gilt  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$  und sind die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit in  $\Lambda$  vertreten, so ist  $X_\Lambda$  ein isolierter Punkt in der Menge aller beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung bezüglich der Operatornormtopologie.

*Beweis.* Siehe Abschnitt 5.8. □

## 5.2. Konstruktion einer Herglotzfunktion

Es wird sich als äußerst nützlich herausstellen, eine matrixwertige Herglotzfunktion zu finden, deren zugeordnetes Borelmaß äquivalent zum Spektralmaß  $E_{\mathbf{B}}$  ist. Man kann so die Aussagen aus Kapitel 2 auf das Spektralmaß des Operators  $\mathbf{B}$  anwenden und minimale Träger der einzelnen Anteile der Lebesguezerlegung von  $E_{\mathbf{B}}$  angeben.

Die folgende Blockzerlegung findet man in ähnlicher Art z. B. in [Tre08] und basiert auf der sogenannten Schur-Zerlegung.

**Lemma 5.7.** Die Resolvente  $(\mathbf{B} - z)^{-1}$  hat für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}_+$  die Blockdarstellung

$$(\mathbf{B} - z)^{-1} = \begin{pmatrix} R_{00}(z) & R_{01}(z) \\ R_{10}(z) & R_{11}(z) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

bezüglich der Zerlegung  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  des Hilbertraumes. Die Koeffizienten des Blockoperators sind lineare Operatoren  $R_{jk}(z) : \mathfrak{H}_k \rightarrow \mathfrak{H}_j$  für  $j, k = 0, 1$  und

erfüllen:

$$R_{00}(z) = [(A_0 - z) - V(A_1 - z)^{-1}V^*]^{-1} \quad (5.4)$$

$$R_{01}(z) = -R_{00}(z)V(A_1 - z)^{-1} \quad (5.5)$$

$$R_{10}(z) = -(A_1 - z)^{-1}V^*R_{00}(z) \quad (5.6)$$

$$R_{11}(z) = (A_1 - z)^{-1} + (A_1 - z)^{-1}V^*R_{00}(z)V(A_1 - z)^{-1}. \quad (5.7)$$

*Beweis.* Die Resolvente  $(\mathbf{B} - z)^{-1}$  ist für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}_+$  wohldefiniert und die obige Blockdarstellung kann elementar nachgerechnet werden. Dies werden wir nun explizit vorführen.

Wir wählen ein  $z \in \mathbb{C}_+$  beliebig aber fest und definieren den linearen Operator  $S : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  durch

$$S = (A_0 - z) - V(A_1 - z)^{-1}V^*.$$

Wir werden nun zeigen, dass dieser Operator bijektiv ist.

Für ein beliebiges  $x \in \mathfrak{H}_0$  mit  $\|x\| = 1$  betrachten wir den Imaginärteil von  $\langle x, Sx \rangle$  und erhalten

$$\operatorname{Im} \langle x, Sx \rangle = -\operatorname{Im} \langle x, (z - A_0)x \rangle - \operatorname{Im} \langle x, V(A_1 - z)^{-1}V^*x \rangle \leq -\operatorname{Im} z.$$

Hier haben wir die Eigenschaften der zwei skalaren Herglotzfunktionen benutzt und die Gleichheit  $\operatorname{Im} \langle x, (z - A_0)x \rangle = \|x\|^2 \operatorname{Im} z$  für  $z \in \mathbb{C}_+$  verwendet. Die Rechnung zeigt, dass der numerische Wertebereich von  $S$  einen strikt positiven Abstand von der reellen Achse hat, sodass  $0 \notin \sigma(S)$  gilt. Der Operator  $S$  ist demnach stetig invertierbar.

Wir bezeichnen die Inverse von  $S$  mit  $R_{00}(z)$  und definieren die weiteren Operatoren  $R_{01}(z)$ ,  $R_{10}(z)$  sowie  $R_{11}(z)$  durch die Gleichungen (5.5) – (5.7). Wir zeigen nun, dass der Blockoperator

$$\mathbf{R}(z) = \begin{pmatrix} R_{00}(z) & R_{01}(z) \\ R_{10}(z) & R_{11}(z) \end{pmatrix}$$

die gesuchte Resolvente ist, d. h. dass  $\mathbf{R}(z)(\mathbf{B} - z) = I_{\mathfrak{H}}$  gilt. Die Richtigkeit dieser Aussage kann mit folgender Rechnung nachvollzogen werden:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R_{00}(z) & R_{01}(z) \\ R_{10}(z) & R_{11}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 - z & V \\ V^* & A_1 - z \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} R_{00} [(A_0 - z) - V(A_1 - z)^{-1}V^*] & R_{00} [V - V(A_1 - z)^{-1}(A_1 - z)] \\ (A_1 - z)^{-1} [V^* - V^*R_{00}S] & (A_1 - z)^{-1}(A_1 - z) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} I_{\mathfrak{H}_0} & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist die Blockzerlegung der Resolvente gezeigt.  $\square$

Mit Hilfe dieser Blockzerlegung der Resolvente werden wir nun eine matrixwertige Herglotzfunktion definieren, die sich als nützlich erweisen wird, da das zugeordnete verallgemeinerte matrixwertige Borelmaß die gleichen Nullmengen wie das Spektralmaß  $E_{\mathbf{B}}$  besitzt. Dies wird später bewiesen werden.

**Satz 5.8.** Die operatorwertige Funktion  $M : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$ , definiert durch

$$M(z) := \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}^* (\mathbf{B} - z)^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

ist eine matrixwertige Herglotz-Funktion. Dabei identifizieren wir üblicherweise den Wertebereich  $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n}) = \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ . Man beachte, dass die Blockmatrizen in Gleichung (5.8) bezüglich der beiden Zerlegungen  $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  zu verstehen sind.

Des Weiteren hat  $M(z)$  bezüglich der orthogonalen Summe  $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1$  die Blockdarstellung:

$$M(z) = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Die Einträge sind lineare Operatoren von  $\mathfrak{H}_1$  nach  $\mathfrak{H}_1$  und erfüllen:

$$M_{00}(z) = [I - V^*(A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1}]^{-1} V^*(A_0 - z)^{-1}V \quad (5.10)$$

$$M_{01}(z) = -M_{00}(A_1 - z)^{-1} \quad (5.11)$$

$$M_{10}(z) = -(A_1 - z)^{-1}M_{00} \quad (5.12)$$

$$M_{11}(z) = [(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V]^{-1}. \quad (5.13)$$

*Beweis.* Es gilt, dass die Funktion  $M : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n}) = \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  analytisch ist, da dies bekanntlich auch die Resolvente  $(\mathbf{B} - z)^{-1}$  ist. Der Imaginärteil der matrixwertigen Funktion berechnet sich leicht mit Hilfe der ersten Resolventengleichung

$$(\mathbf{B} - z)^{-1} - (\mathbf{B} - \bar{z})^{-1} = (z - \bar{z})(\mathbf{B} - \bar{z})^{-1}(\mathbf{B} - z)^{-1}$$

und führt zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} M(z) &= \frac{1}{2i} (M(z) - M(z)^*) \\ &= \operatorname{Im} z \left[ \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}^* (\mathbf{B} - \bar{z})^{-1}(\mathbf{B} - z)^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass für ein beliebiges  $x \in \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$  und  $z \in \mathbb{C}_+$

$$(x | \operatorname{Im} M(z)x) = \operatorname{Im} z \left\langle (\mathbf{B} - z)^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix} x, (\mathbf{B} - z)^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix} x \right\rangle \geq 0$$

gilt. Hier steht  $(\cdot | \cdot)$  für das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^{2n}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für das Skalarprodukt im Hilbertraum  $\mathfrak{H}$ . Weiterhin erfüllt die Blockzerlegung von  $M$  mit Hilfe der Darstellungen aus den Gleichungen (5.4) – (5.7) Folgendes

$$M = \begin{pmatrix} V^*R_{00}V & V^*R_{01} \\ R_{10}V & R_{11} \end{pmatrix},$$

wobei wir das Argument  $z \in \mathbb{C}^+$  zur Übersicht weglassen. Aus der Darstellung von  $R_{00}$  und der Gleichung

$$I_{\mathfrak{H}_0} = (A_0 - z)^{-1} [(A_0 - z) - V(A_1 - z)^{-1}V^*] + (A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1}V^*$$

erhalten wir durch Multiplikation mit  $R_{00}$  von rechts

$$R_{00} = (A_0 - z)^{-1} + (A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1}V^*R_{00} .$$

Multiplizieren wir nun  $V^*$  von links und  $V$  von rechts, so erhalten wir nach Umformungen

$$[I_{\mathfrak{H}_1} - V^*(A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1}] M_{00} = V^*(A_0 - z)^{-1}V .$$

Die Darstellungen von  $M_{01}$  und  $M_{10}$  ergeben sich direkt und  $M_{11}$  folgt aus der folgenden kurzen Rechnung

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{H}_1} &= [I_{\mathfrak{H}_1} - V^*(A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1}] + V^*(A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1} \\ &= [I_{\mathfrak{H}_1} - V^*(A_0 - z)^{-1}V(A_1 - z)^{-1}] (I_{\mathfrak{H}_1} + M_{00}(A_1 - z)^{-1}) \\ &= [(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V] ((A_1 - z)^{-1} + (A_1 - z)^{-1}M_{00}(A_1 - z)^{-1}) , \end{aligned}$$

sodass der Satz bewiesen ist.  $\square$

Man beachte, dass man mit Kombination der beiden Gleichungen (5.10) und (5.13) auch

$$M_{00}(z) = (A_1 - z)M_{11}(z)V^*(A_0 - z)^{-1}V \quad (5.14)$$

erhält. Dies werden wir nun verwenden, wenn wir die Spur der matrixwertigen Herglotzfunktion berechnen. Die Spurbildung liefert uns nach Kapitel 2 eine skalare Herglotzfunktion, die wir im Weiteren genauer betrachten möchten. Die Kommutativität der Spurbildung erlaubt es uns die Multiplikation mit der inversen Matrix als Quotient zu schreiben. Dies verkürzt vor allem größere Formeln.

**Satz 5.9.** *Es gilt für die Spur der Herglotzfunktion  $M$ :*

$$\operatorname{tr} M(z) = \operatorname{tr} \left[ \frac{N_0(z)N_1(z) - I_{\mathfrak{H}_1}}{N_0(z) + N_1(z)} \right] . \quad (5.15)$$

*Hierbei sind  $N_0(z) := V^*(A_0 - z)^{-1}V$  und  $N_1(z) := -(A_1 - z)$  ebenfalls matrixwertige Herglotzfunktionen.*

*Beweis.* Man verwendet die Tatsache, dass die Spur der Blockmatrix die Summe der Spuren der Diagonalen ist und erhält

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} M(z) &= \operatorname{tr} M_{00}(z) + \operatorname{tr} M_{11}(z) \stackrel{(5.14)}{=} \operatorname{tr} [-M_{11}(z)N_0(z)N_1(z)] + \operatorname{tr} M_{11}(z) \\ &= \operatorname{tr} [M_{11}(z)(I_{\mathfrak{H}_1} - N_0(z)N_1(z))] . \end{aligned}$$

Das Einsetzen von  $M_{11}$  mit Formel (5.13) liefert die Behauptung.  $\square$

Im nächsten Satz möchten wir eine Darstellung des Operators  $V$  bzw.  $V^*$  angeben, die sich sofort ergibt, wenn wir den Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  mit  $\mathbb{C}^n$  identifizieren. Für den Fall  $n = 1$  gilt selbstverständlich  $V(\lambda) = \lambda v$  für ein  $v \in \mathfrak{H}_0$  und demnach ebenfalls  $V^*(x) = \langle v, x \rangle_{\mathfrak{H}_0}$ , vgl. dazu auch [KM05]. Dies lässt sich nun für den Fall  $n \in \mathbb{N}$  leicht verallgemeinern.

**Satz 5.10.** *Der lineare Operator  $V : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  hat mit der Identifizierung  $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^n$  die Form*

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \quad (5.16)$$

mit  $v_i \in \mathfrak{H}_0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Für den adjungierten Operator  $V^* : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1$  gilt

$$V^*(x) = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle_{\mathfrak{H}_0} \mathbf{e}_i, \quad (5.17)$$

wobei  $\mathbf{e}_i$  für den  $i$ -ten Standardbasisvektor in  $\mathbb{C}^n$  steht.

*Beweis.* Die Darstellung von  $V$  ist gewöhnliche lineare Algebra. Die Darstellung von  $V^*$  sieht man aus folgender Gleichung, wobei  $x \in \mathfrak{H}_0$  und  $\lambda \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\langle x, V(\lambda) \rangle_{\mathfrak{H}_0} = \sum_{i=1}^n \overline{\langle v_i, x \rangle_{\mathfrak{H}_0}} \lambda_i = \left( \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle_{\mathfrak{H}_0} \mathbf{e}_i \mid \lambda \right).$$

Die runde Klammer steht wie immer für das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$

Wir werden in expliziten Rechnungen  $\mathfrak{H}_1$  durchgängig mit  $\mathbb{C}^n$  identifizieren und mit der Standardbasis ausrüsten. Alle linearen Abbildungen in  $\mathfrak{H}_1$  sind dann als Matrizen bezüglich dieser Basis zu verstehen. Eine wichtige Matrixdarstellung möchten wir kurz festhalten:

**Bemerkung 5.11.** Für jedes  $z \in \mathbb{C}_+$  gilt

$$(V^*(A_0 - z)^{-1}V)_{ij} = \langle v_i, (A_0 - z)^{-1}v_j \rangle_{\mathfrak{H}_0},$$

wobei  $v_i \in \mathfrak{H}_0$  für  $i = 1, \dots, n$  nach Satz 5.10 gewählt sind.

In [KM05] wurde bewiesen, dass im Falle  $n = 1$  das Spektrum des gestörten Operators  $\mathbf{B}$  immer einfach ist. Das folgende Lemma verallgemeinert dieses Resultat auf beliebige endliche Dimensionen  $n$  des Hilbertraumes  $\mathfrak{H}_1$  und zeigt, dass die maximale Multiplizität des Spektrums durch die Dimension von  $\mathfrak{H}_1$  beschränkt bleibt.

**Lemma 5.12.** *Der Raum  $0 \oplus \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  ist ein zyklischer Unterraum für den Operator  $\mathbf{B}$ . Insbesondere ist die Multiplizität des Spektrums von  $\mathbf{B}$  nicht größer als  $\dim \mathfrak{H}_1 = n$ .*

*Beweis.* In diesem Beweis setzen wir  $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^n$ . Wir können ohne Einschränkung die Standardbasis  $(\mathbf{e}_i)$  des  $\mathbb{C}^n$  und  $A_1$  als Diagonalmatrix bezüglich dieser Basis wählen. Weiterhin wählen wir die Darstellungen der Operatoren  $V$  und  $V^*$  aus dem Satz 5.10.

Nach der Voraussetzung, dass Bild  $V$  ein zyklischer Unterraum für den Operator  $A_0$  ist, ist demnach

$$\text{lin span} \{ v_i \oplus 0, 0 \oplus \mathbf{e}_i \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \mid 1 \leq i \leq n \}$$

ein zyklischer Unterraum für  $\mathbf{B}$ . Offensichtlich können wir in dieser Menge  $v_i \oplus 0$  durch  $v_i \oplus A_1 \mathbf{e}_i$  ersetzen, sodass die lineare Hülle ein zyklischer Unterraum für  $\mathbf{B}$  bleibt. Da nun aber  $\mathbf{B}(0 \oplus \mathbf{e}_i) = v_i \oplus A_1 \mathbf{e}_i$  gilt, ist sogar schon der Raum

$$\text{lin span} \{ 0 \oplus \mathbf{e}_i \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \mid 1 \leq i \leq n \} = 0 \oplus \mathbb{C}^n$$

ein zyklischer Unterraum für  $\mathbf{B}$ .  $\square$

In dieser allgemeinen Formulierung ist diese Grenze an die Multiplizität wirklich scharf, wie wir später an passenden Beispielen demonstrieren werden.

Wie vorher angekündigt, zeigen wir nun den Zusammenhang zwischen der konstruierten Herglotzfunktion und dem Spektralmaß von  $\mathbf{B}$ . Es sei daran erinnert, dass das Borelmaß zur matrixwertigen Herglotzfunktion  $M$  und das Borelmaß zur der skalaren Herglotzfunktion  $\text{tr } M$  nach Satz 2.19 äquivalente Maße sind. Aus diesem Grund können wir uns auf die skalare Herglotzfunktion und das zugeordnete positive Borelmaß beschränken:

**Theorem 5.13.** *Die Herglotzfunktion*

$$\phi(z) := \text{tr} \left[ \frac{I_{\mathfrak{H}_1} + (A_1 - z)V^*(A_0 - z)^{-1}V}{(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V} \right] \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}_+ \quad (5.18)$$

hat die Darstellung

$$\phi(z) = \int \frac{1}{t - z} d\omega(t), \quad (5.19)$$

wobei  $\omega$  ein positives Borelmaß mit kompaktem topologischem Träger auf  $\mathbb{R}$  ist. Darüber hinaus besitzen  $\omega$  und  $E_{\mathbf{B}}$  die gleichen Nullmengen und sind in diesem Sinne äquivalente Maße.

*Beweis.* Wir definieren mit Hilfe des Spektralmaßes  $E_{\mathbf{B}}$  von  $\mathbf{B}$  ein operatorwertiges Borelmaß  $\Omega$  mit Werten in  $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$  durch

$$\Omega(\Delta) := \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}^* E_{\mathbf{B}}(\Delta) \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}$$

für jede Borelmenge  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ . Es ist offensichtlich  $\Omega(\Delta) \geq 0$  für jede beliebige Borelmenge  $\Delta$  erfüllt. Durch Spurbildung

$$\omega(\Delta) := \text{tr } \Omega(\Delta)$$

erhält man ein positives Borelmaß  $\omega$ , welches nach Satz 2.19 sogar äquivalent zum Maß  $\Omega$  ist.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega(t)}{t - z} &= \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}^* \int \frac{1}{t - z} dE_{\mathbf{B}}(t) \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix}^* (\mathbf{B} - z)^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_1} \end{pmatrix} = M(z). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die  $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$ -wertige Herglotzfunktion aus Satz 5.8 das zugeordnete operatorwertige Maß  $\Omega$  besitzt. Demnach folgt abermals aus Spurbildung

$$\text{tr } M(z) = \int \frac{d\omega(t)}{t - z}.$$

In Satz 5.9 wurde die Spur von  $M$  berechnet und wir erhalten:

$$\text{tr } M(z) = \text{tr} \left[ \frac{I_{\mathfrak{H}_1} + (A_1 - z)V^*(A_0 - z)^{-1}V}{(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V} \right] = \phi(z).$$

Insgesamt ist  $\phi$  eine skalare Herglotzfunktion mit zugeordnetem Borelmaß  $\omega$ .

Nun zeigen wir die Äquivalenz von  $\omega$  und  $E_{\mathbf{B}}$ . Dass aus  $E_{\mathbf{B}}(\Delta) = 0$  auch  $\omega(\Delta) = 0$  folgt, ist offensichtlich nach der Definition von  $\omega$  richtig. Es sei nun  $\Delta$  eine Borelmenge mit  $\omega(\Delta) = 0$ . Ausgeschrieben bedeutet dies für die Spur:

$$0 = \sum_{i=1}^n \langle v_i \oplus 0, E_{\mathbf{B}}(\Delta) v_i \oplus 0 \rangle + \sum_{i=1}^n \langle 0 \oplus \mathbf{e}_i, E_{\mathbf{B}}(\Delta) 0 \oplus \mathbf{e}_i \rangle .$$

Folglich muss hier jeder Summand verschwinden. Somit erkennen wir, dass auch  $\langle 0 \oplus \mathbf{e}_i, E_{\mathbf{B}}(\Delta) 0 \oplus \mathbf{e}_i \rangle = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt. Das vorherige Lemma 5.12 in Kombination mit Satz 3.23 zeigt nun  $E_{\mathbf{B}}(\Delta) = 0$ .  $\square$

Es sei an Kapitel 3 erinnert, in welchem maximale Spektralvektoren behandelt wurden. Es ist nach diesem Kapitel bekannt, dass jeder selbstadjungierter Operator  $\mathbf{B}$  einen maximalen Spektralvektor besitzt, zu welchem ein positives spektrales Maß  $\mu$  gehört. Das obige Theorem zeigt letztendlich, dass die Maße  $\omega$  und  $\mu$  äquivalent sind. Die Aufspaltung des Spektrums von  $\mathbf{B}$  in die Anteile

$$\sigma(\mathbf{B}) = \sigma_{ac}(\mathbf{B}) + \sigma_{sc}(\mathbf{B}) + \sigma_{pp}(\mathbf{B})$$

kann folglich auch über das Maß  $\omega$  berechnet werden.

Wir zerlegen das zu betrachtende Maß  $\omega$  mit dem Lebesgueschen Zerlegungssatz in die üblichen Anteile:

$$\omega = \omega_{ac} + \omega_s = \omega_{ac} + \omega_{sc} + \omega_{pp} .$$

Nehmen wir an, dass das singuläre Spektrum des Operators  $\mathbf{B}$  nicht leer ist, so ist auch der folgende minimale Träger des Anteils  $\omega_s$  nicht leer:

**Satz 5.14.** *Die Menge*

$$S_s := S_0 \cup S_\infty \text{ mit}$$

$$S_0 := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det [(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V] = 0 \right\}$$

$$S_\infty^{(1)} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det [(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V] \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \right. \\ \left. \|V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty \right\}$$

$$S_\infty^{(2)} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\det(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V| = \infty, \right. \\ \left. \left\| [(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V]^{-1} \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty \right\}$$

$$S_\infty := S_\infty^{(1)} \cup S_\infty^{(2)}$$

ist ein minimaler Träger von  $\omega_s$ .

*Beweis.* Dies ist nur eine Umformulierung des Satzes 2.28. Bezogen auf diesen Satz entspricht  $S_0$  der Menge  $S_s^1$  und es gilt  $S_\infty = S_s^2 \cup S_s^3$ . Die Minimalität des Trägers ist auch in dieser Formulierung durch Theorem 2.22 Teil (c) gesichert.  $\square$

Diese Aufspaltung ist sehr interessant und wichtig, da die Elemente von  $S_0$  in einem gewissen Sinne direkt für die weitere Betrachtung zur Verfügung stehen, die Elemente von  $S_\infty$  indessen genauer unterschieden werden müssen. In Abschnitt 5.4 werden wir darauf zurückkommen. Es wird sich herausstellen, dass die Menge  $S_\infty$  im eindimensionalen Fall immer leer ist, aber es schon für  $n = 2$  einen Beitrag von  $S_\infty$  geben kann.

### 5.3. Implizite Lösung der Riccati-Gleichung

In diesem Abschnitt werden wir eine implizite Lösungsformel der Riccati-Gleichung vorstellen. Dazu verwenden wir den Spektralsatz um mit  $L^2$ -Funktionen arbeiten zu können. Für die Lösung werden wir letztendlich eine Integralformel aufstellen.

Nach der Generalvoraussetzung 5.1 ist die Multiplizität des Spektrums von  $A_0$ , die wir ab sofort mit  $p \in \mathbb{N}$  bezeichnen, nicht größer als die Dimension des Bildes von  $V$ , insbesondere nicht größer als  $n := \dim \mathfrak{H}_1$ . Auch die Multiplizität des Spektrums von  $\mathbf{B}$  ist nach Lemma 5.12 durch  $n$  beschränkt.

Nach den Ergebnissen der Spektraltheorie aus Kapitel 3 können wir den Hilbertraum  $\mathfrak{H}_0$  als orthogonale Summe

$$\mathfrak{H}_0 = \bigoplus_{i=1}^p L^2(\mathbb{R}, m_i)$$

schreiben, sodass  $A_0$  der gewöhnliche Multiplikationsoperator mit der unabhängigen Variablen ist. Man vergleiche dazu Satz 3.17. Weiterhin können wir die Maße so wählen, dass  $m_p \ll \dots \ll m_1$  gilt, d. h.  $m_1$  gehört zu einem maximalen Spektralvektor von  $A_0$  (vgl. Satz 3.18). Aufgrund der absoluten Stetigkeit der spektralen Maße existieren somit für alle  $k \in \{2, \dots, p\}$  Funktionen  $g_k$  mit  $dm_k = g_k dm_1$ .

Bezüglich dieser Zerlegung des Hilbertraumes  $\mathfrak{H}_0$  hat  $A_0$  die folgende Blockdarstellung

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A_0^{(p)} \end{pmatrix},$$

wobei die linearen selbstadjungierten Operatoren  $A_0^{(i)} : L^2(\mathbb{R}, m_i) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, m_i)$  durch  $A_0^{(i)}(f)(t) = t f(t)$  gegeben sind.

Im Weiteren nehmen wir die Identifizierung  $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^n$  an, wobei  $\mathbb{C}^n$  die Standardbasis trägt. Auch für den Operator  $V : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  können wir bezüglich dieser Zerlegungen einen Blockoperator angeben:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{p1} & \cdots & v_{pn} \end{pmatrix}.$$

Hier sind  $v_{ij} \in L^2(\mathbb{R}, m_i)$  für alle  $j = 1, \dots, n$  und  $i = 1, \dots, p$ . Genauso ist auch der Operator  $V^* : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1$  dargestellt als

$$V^* = \begin{pmatrix} \langle v_{11}, \cdot \rangle & \cdots & \langle v_{p1}, \cdot \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_{1n}, \cdot \rangle & \cdots & \langle v_{pn}, \cdot \rangle \end{pmatrix}.$$

Diese Schreibweise ist wie immer als

$$V^*(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \langle v_{ji}, x_j \rangle_{L^2(m_j)} \mathbf{e}_i, \quad x = x_1 \oplus \cdots \oplus x_p \in \mathfrak{H}_0$$

zu verstehen, wobei jeweils  $x_j \in L^2(\mathbb{R}, m_j)$  und  $(\mathbf{e}_i)$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^n$  ist. Weiterhin identifizieren wir den Operator  $A_1$  direkt mit seiner Matrix bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{C}^n$ .

Mit diesen Darstellungen wenden wir uns der Riccati-Gleichung zu und konzentrieren uns auf das Auffinden von beschränkten Lösungen dieser. Die Riccati-Gleichung lautet

$$A_1 X - X A_0 - X V X + V^* = 0$$

und  $X : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1$  ist die beschränkte Lösung. Der zu  $X$  adjungierte Operator erfüllt dann auch die adjungierte Riccati-Gleichung

$$X^* A_1 - A_0 X^* - X^* V^* X^* + V = 0. \quad (5.20)$$

Diese ist in unserem Fall besser zu handhaben, da die Lösung  $X^* : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  als Operator von endlichem Rang als Matrix repräsentiert werden kann.

Mit den genannten Identifizierungen

$$\mathfrak{H}_0 = \bigoplus_{i=1}^p L^2(m_i) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^n, \quad (5.21)$$

ist die Matrixdarstellung

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix},$$

wobei hier  $x_{ji} \in L^2(\mathbb{R}, m_j)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt. Nehmen wir die Punktauswertung dieser Funktionen  $x_{ji}$  an der Stelle  $t$ , selbstverständlich fast überall bezüglich  $m_1$ , so definiert dies eine komplexe  $p \times n$  Matrix, die wir mit

$$\mathcal{X}_*(t) := \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1}(t) & \cdots & x_{pn}(t) \end{pmatrix}$$

bezeichnen. Analog definieren wir f. ü. die komplexe Matrix

$$\mathcal{V}(t) := \begin{pmatrix} v_{11}(t) & \cdots & v_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{p1}(t) & \cdots & v_{pn}(t) \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die adjungierte Riccati-Gleichung punktweise für  $m_1$ -fast jeden Punkt  $t \in \mathbb{R}$  betrachten

$$\mathcal{X}_*(t)A_1 - t\mathcal{X}_*(t) - \mathcal{X}_*(t)(V^*X^*) + \mathcal{V}(t) = 0 ,$$

wobei

$$V^*X^* = \left( \sum_{i=1}^p \langle v_{ij}, x_{ik} \rangle_{L^2(m_i)} \right)_{jk} =: Y$$

eine konstante Matrix  $Y$  definiert. Somit ergibt sich durch Auflösen der Gleichung

$$\mathcal{X}_*(t) = -\mathcal{V}(t) (A_1 - t - Y)^{-1} .$$

Schreiben wir nun die Skalarprodukte der Matrix  $Y$  als Integrale aus und führen mit den Radon-Nykodým-Dichten  $(g_j)$  die Matrix

$$\mathcal{W}(t) := \begin{pmatrix} \overline{v_{11}(t)}g_1(t) & \cdots & \overline{v_{p1}(t)}g_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{v_{1n}(t)}g_1(t) & & \overline{v_{pn}(t)}g_p(t) \end{pmatrix}$$

ein, so erhalten wir folgende Bestimmungsgleichung für  $Y$ :

$$\begin{aligned} Y = V^*X^* &= \int \mathcal{W}(t)\mathcal{X}_*(t) dm_1(t) \\ &= - \int \mathcal{W}(t)\mathcal{V}(t) (A_1 - t - Y)^{-1} dm_1(t) . \end{aligned}$$

Um eine beschränkte Lösung der Riccati-Gleichung zu erhalten, können wir demnach zuerst eine  $n \times n$  Matrix  $Y$  finden, welche die Gleichung

$$Y = - \int \mathcal{W}(t)\mathcal{V}(t) (A_1 - t - Y)^{-1} dm_1(t) \quad (5.22)$$

erfüllt. Die Lösung der konjugierten Riccati-Gleichung ist dann durch

$$\mathcal{X}_*(t) := \mathcal{V}(t) (Y - A_1 + t)^{-1} \quad (5.23)$$

punktweise definiert und liefert einen beschränkten Operator  $X^* : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$ , dessen adjungierter Operator die Riccati-Gleichung löst. Diesen erhält man durch Setzen von

$$X^*u := (t \mapsto \mathcal{X}_*(t)u) \in \bigoplus_{i=1}^p L^2(m_i) \quad (5.24)$$

für  $u \in \mathfrak{H}_1$ .

Diese implizite Lösungsformel ist besonders für Störungen vom Rang Eins interessant, da man dann von einem einfachen Spektrum des Operators  $A_0$  ausgeht und man deswegen auf die Radon-Nykodým-Dichten  $(g_j)$  verzichten kann. Dies wird im eindimensionalen Fall, siehe Abschnitt 5.5, genauer demonstriert.

#### 5.4. Berechnung der Eigenwerte

In den weiteren Abschnitten werden wir die Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  benötigen, um beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung zu konstruieren. Dabei wird es sehr nützlich sein, diese in Gleichungen für die Operatoren  $A_0$ ,  $A_1$  und  $V$  zu charakterisieren. Hierbei werden wir verschiedene Fälle unterscheiden, da nicht alle Eigenwerte zur Lösung der Riccati-Gleichung beitragen können. Aus diesem Grund versuchen wir hier nicht eine möglichst kleine Fallunterscheidung durchzuführen, sondern eine für spätere Zwecke sinnvolle.

**Lemma 5.15.** *Eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$ , wenn ein Vektor  $0 \neq y \in \mathfrak{H}_1$  mit*

$$Vy \in \text{Bild}(A_0 - \lambda) \subseteq (\text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\}))^\perp \quad (5.25)$$

existiert und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) *Es gilt  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  mit*

$$(A_1 - \lambda)y = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy, \quad Vy \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}).$$

(b) *Es gilt  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$  und  $y \notin \text{Kern } V \subseteq \mathfrak{H}_1$  mit*

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy.$$

(c) *Es gilt  $\lambda \in \sigma_p(A_0) \cap \sigma_p(A_1)$  und  $y \in \text{Kern } V \subseteq \mathfrak{H}_1$  mit*

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy = 0.$$

(d) *Es gilt  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$  mit einem Eigenvektor  $x \in \mathfrak{H}_0$  und*

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy - V^*x.$$

*Beweis.* Eine reelle Zahl  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$ , wenn folgende zwei Gleichungen für einen Vektor  $(0, 0) \neq (y_0, y_1) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  erfüllt sind

$$(A_0 - \lambda)y_0 = -Vy_1, \quad (5.26)$$

$$(A_1 - \lambda)y_1 = -V^*y_0. \quad (5.27)$$

Nehmen wir nun zuerst an, dass  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$  ist, dann können nur zwei Fälle auftreten:

1. *Fall:* Es sei  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$ . Dann ist  $(A_0 - \lambda)$  injektiv und Gleichung (5.26) kann nach  $y_0$  umgeformt werden und in (5.27) eingesetzt werden. Man erhält

$$(A_1 - \lambda)y_1 = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy_1$$

für  $y_1 \neq 0$ , da nach Gleichung (5.26) genau dann  $y_0 = 0$  gilt, wenn  $y_1 \in \text{Kern } V$ .

2. Fall: Es sei  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$ , d. h.  $(A_0 - \lambda)$  ist nicht injektiv. Aus diesem Grund betrachten wir für ein  $\varepsilon > 0$  und mit Hilfe von (5.26) die folgende Gleichung:

$$V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A_0 - \lambda)y_0 = -V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy_1. \quad (5.28)$$

Wir unterscheiden folgende Möglichkeiten für den Vektor  $y_0 \in \mathfrak{H}_0$ :

(i): Es gelte  $y_0 = 0$ . Mit Gleichung (5.27) folgt demnach, dass  $\lambda$  im Punktspektrum von  $A_1$  liegt und

$$(A_1 - \lambda)y_1 = 0$$

gilt, wobei wiederum  $y_1 \neq 0$  gelten muss. Diese Gleichung entspricht nun genau Bedingung (c).

(ii): Es gelte nun  $y_0 \neq 0$  und  $y_0 \in \text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\})^\perp$ . Dann darf  $y_1$  nach Gleichung (5.26) nicht im Kern von  $V$  liegen und weiterhin ist  $y_1 \in \text{Bild}(A_0 - \lambda)$  erfüllt.

Der Grenzwert der linken Seiten von (5.28) kann mit Proposition 3.38 berechnet werden:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A_0 - \lambda)y_0 = V^*y_0.$$

Mit Gleichung (5.27) ergibt sich somit die Behauptung aus Bedingung (b).

(iii): Es gelte  $y_0 \neq 0$  und  $y_0 \notin \text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\})^\perp$ . Dann berechnen wir wie im vorherigen Fall den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A_0 - \lambda)y_0 = V^*(I - E_{A_0}(\{\lambda\}))y_0$$

mit Proposition 3.38. Für den Eigenvektor schreiben wir  $0 \neq x = E_{A_0}(\{\lambda\})y_0$  und erhalten dann

$$(A_1 - \lambda)y_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy_1 - V^*x.$$

Man beachte hier, dass aufgrund von Satz 3.25 der Vektor  $y_1$  nicht verschwinden kann, sodass auch Bedingung (d) gezeigt ist.

Es verbleibt nun nur die Rückrichtung zu zeigen. Ist eine der Bedingungen (a), (b), (c) für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $y \in \mathfrak{H}_1$  erfüllt, so gilt immer  $y_1 := y \in \text{Bild}(A_0 - \lambda)$ . Der Vektor  $y_0 \in E_{A_0}(\{\lambda\})^\perp$  wird nun so gewählt, dass

$$(A_0 - \lambda)y_0 = -Vy_1$$

erfüllt ist. Mit Verwendung von Proposition 3.38 sind die Gleichungen (5.26) und (5.27) offensichtlich erfüllt. Insgesamt ist  $(y_0, y_1) \in \mathfrak{H}$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{B}$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

Falls nun Bedingung (d) zutrifft, so verläuft die Argumentation vollkommen identisch. Einzig und allein bei der Wahl von  $y_0$  muss der Eigenvektor  $x \in \mathfrak{H}_0$  berücksichtigt werden.  $\square$

Aus den Bedingungen (a), (b) und (c) werden wir starke Lösungen der Riccati-Gleichung konstruieren können, während Eigenwerte, die Bedingung (d) erfüllen, dazu nicht genutzt werden können. Nun ist es wichtig zu bemerken, dass selbst für einen endlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  alle vier Fälle eintreten können. Dies werden wir später noch an einigen Beispielen demonstrieren.

Es sei noch erwähnt, dass die Fallunterscheidung in Lemma 5.15 nur aufgrund der späteren Betrachtungen eingeführt wurde. Selbstverständlich lassen sich die verschiedenen Fälle auch zusammenfassen:

**Bemerkung 5.16.** Eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$ , wenn ein  $0 \neq y \in \mathfrak{H}_1$  und ein  $x \in \text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\})$  so existieren, dass  $Vy \in \text{Bild}(A_0 - \lambda)$  und

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy - V^*x. \quad (5.29)$$

erfüllt ist.

Wir zeigen nun anhand eines niedrigdimensionalen Beispiels, dass die Bedingungen (a) und (b) eintreten können:

**Beispiel 5.17.** Der komplexe Hilbertraum  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  sei endlichdimensional mit  $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^2$ . Auf diesem ist der folgende Operator definiert

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_0 & V \\ V^* & A_1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ \hline 1 & & 2 & \\ & 1 & & 1 \end{array} \right).$$

Wie man nun leicht berechnen kann, besitzt dieser die ganzzahligen Eigenwerte 0, 1, 2 und 3. Da 0 und 3 nicht im Spektrum von  $A_0$  liegen, ist für diese die Bedingung (a) erfüllt. Eine weitere kurze Rechnung bestätigt, dass 1 und 2 die Bedingung (b) erfüllen.

Wie wir später feststellen werden, spielt die Vielfachheit des Eigenwertes eine wesentliche Rolle beim Auffinden von Lösungen der Riccati-Gleichung, sodass wir das obige Lemma 5.15 etwas detaillierter formulieren möchten:

**Lemma 5.18.** Ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$  mit mindestens Vielfachheit  $k$ , wenn es eine Menge von  $k$  linear unabhängigen Vektoren  $\{y^{(j)}\} \subseteq \mathfrak{H}_1$  gibt und wenn für jeden Vektor  $y^{(j)}$

$$Vy^{(j)} \in \text{Bild}(A_0 - \lambda) \subseteq (\text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\}))^\perp \quad (5.30)$$

und eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

(a) Es gilt  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  und

$$(A_1 - \lambda)y^{(j)} = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy^{(j)},$$

und  $Vy^{(j)} \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1})$ .

(b) Es gilt  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$  und  $y^{(j)} \notin \text{Kern } V \subseteq \mathfrak{H}_1$  mit

$$(A_1 - \lambda)y^{(j)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy^{(j)}.$$

(c) Es gilt  $\lambda \in \sigma_p(A_0) \cap \sigma_p(A_1)$  und  $0 \neq y^{(j)} \in \text{Kern } V \subseteq \mathfrak{H}_1$  mit

$$(A_1 - \lambda)y^{(j)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy^{(j)}.$$

(d) Es gilt  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$  mit einem Eigenvektor  $x \in \mathfrak{H}_0$  und

$$(A_1 - \lambda)y^{(j)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy^{(j)} - V^*x.$$

*Beweis.* Wie auch im Beweis von Lemma 5.15 ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau dann ein Eigenwert des Operators  $\mathbf{B}$  mit mindestens Vielfachheit  $k$ , wenn es linear unabhängige Vektoren  $(0, 0) \neq (y_0^{(j)}, y_1^{(j)}) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  für  $j = 1, \dots, k$  gibt mit:

$$(A_0 - \lambda)y_0^{(j)} = -Vy_1^{(j)} \quad (5.31)$$

$$(A_1 - \lambda)y_1^{(j)} = -V^*y_0^{(j)}. \quad (5.32)$$

Nach Lemma 5.15 existieren genau die genannten vier Möglichkeiten und es verbleibt nur die lineare Unabhängigkeit der Menge

$$\{y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(k)}\} \subseteq \mathfrak{H}_1$$

zu zeigen.

1. *Fall:* Es gelte  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$ . Dann gilt für jedes  $j = 1, \dots, k$  die Gleichung

$$y_0^{(j)} = -(A_0 - \lambda)^{-1}Vy_1^{(j)}.$$

Nehmen wir an, die Vektoren  $\{y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(k)}\}$  seien linear abhängig, so gälte dies nach obiger Gleichung auch für die Eigenvektoren  $(y_0^{(j)}, y_1^{(j)}) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$ . Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung an die Eigenvektoren.

2. *Fall:* Es gelte  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$ . Wir nehmen an, die Vektoren  $\{y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(k)}\}$  seien linear abhängig, d. h. es existieren Zahlen  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ , welche nicht alle verschwinden, mit

$$\alpha_1 y_1^{(1)} + \dots + \alpha_k y_1^{(k)} = 0.$$

Mit Gleichung (5.31) folgt somit, dass  $z := \alpha_1 y_0^{(1)} + \dots + \alpha_k y_0^{(k)}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$  ist. Die zweite Gleichung (5.32) fordert nun, dass  $V^*z = 0$  gilt. Aus dieser Bedingung folgt mit Satz 3.25, dass

$$z = \alpha_1 y_0^{(1)} + \dots + \alpha_k y_0^{(k)} = 0$$

erfüllt ist. Insgesamt wären die Eigenvektoren  $(y_0^{(j)}, y_1^{(j)}) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  linear abhängig, abermals im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Rückrichtung wurde schon in Lemma 5.15 gezeigt und führt hier auf die Vielfachheit des Eigenwertes.  $\square$

Wir wissen nach Lemma 5.12, dass die Vielfachheit eines Eigenwertes von  $\mathbf{B}$  höchstens  $\dim \mathfrak{H}_1 = n$  betragen kann. Daraus ergibt sich die folgende Aussage:

**Lemma 5.19.** *Ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$  mit maximaler Vielfachheit  $n$ , wenn  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  und*

$$A_1 - \lambda = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}V \quad \text{und} \quad \text{Bild } V \subseteq \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \quad (5.33)$$

für  $\lambda$  erfüllt ist.

*Beweis.* Nehmen wir an, dass  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$  ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$  mit Vielfachheit  $n$  ist. Dann gelten die Fälle (b), (c) oder (d) für eine linear unabhängige Menge von  $n$  Vektoren  $y^{(j)}$ , die den ganzen Raum  $\mathfrak{H}_1$  aufspannen. Insgesamt gilt demnach

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\operatorname{tr} V(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} V^*| < \infty ,$$

im Widerspruch zu Satz 3.27.

Es muss somit für alle  $y^{(j)}$  Fall (a) eintreten, also insbesondere ist  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$ . Da die obigen Vektoren den Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  aufspannen, entspricht die Bedingung (a) genau der Gleichung (5.33).  $\square$

Wie schon vorhin erwähnt, werden wir in den folgenden Abschnitten die Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  zur Konstruktion von beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung nutzen. Die Bedingung (d) wird sich aufgrund des nichtverschwindenden Terms  $V^*x$  als für diese Zwecke sehr hinderlich herausstellen. Das folgende einfache Beispiel demonstriert, dass solche Eigenwerte unglücklicherweise schon in niedrigen Dimensionen auftreten.

**Beispiel 5.20.** Der komplexe Hilbertraum  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  sei durch  $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^2$  gegeben. Wir betrachten folgenden linearen Operator  $\mathbf{B} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_0 & V \\ V^* & A_1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \\ & 1 & & 0 \end{array} \right) .$$

Man erkennt schnell, dass  $(-1, 1, 0, 1)^T \in \mathfrak{H}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda = 1$  ist. Die Gleichung

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy - V^*x$$

mit  $y = (0, 1)^T$  führt auf  $V^*x = (-1, 0)^T$ .

## 5.5. Der eindimensionale Fall

Wir präsentieren nun zuerst den einfachen Fall der eindimensionalen Störung, wie er in [KM05] behandelt wurde, wobei wir allerdings viele Details ausführen werden. Es wird sich herausstellen, dass sich tatsächlich Lösungen der Riccati-Gleichung finden lassen und zwar sowohl beschränkte wie unbeschränkte, solange das singuläre Spektrum des Operators  $\mathbf{B}$  nicht verschwindet.

Ist der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  eindimensional, d. h. es gilt  $n = 1$ , so kann der unendlichdimensionale separable Hilbertraum  $\mathfrak{H}_0$  als  $L^2(\mathbb{R}, m)$  dargestellt werden, wobei  $m$  ein Borelwahrscheinlichkeitsmaß mit einem kompakten topologischen Träger ist, sodass  $A_0$  der Multiplikationsoperator ist:

$$(A_0x_0)(t) = tx_0(t) , \quad x_0 \in \mathfrak{H}_0 .$$

Der lineare Operator  $A_1$  ist die Multiplikation mit einer reellen Zahl  $a_1 \in \mathbb{R}$  und  $V$  hat nach Satz 5.10 die Form  $V(\lambda) = \lambda v$  für ein bestimmtes  $v \in \mathfrak{H}_0$ . Der adjungierte Operator hat dann folgende einfache Form

$$V^* = \langle v, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}_0} .$$

Vergleiche dazu auch den Spektralsatz aus Theorem 3.11, welcher unter anderem besagt, dass  $v \in \mathfrak{H}_0 = L^2(\mathbb{R}, m)$  eine konstante Funktion ist, d. h. es gilt

$$v(t) = \|v\| \text{ für alle } t \in \mathbb{R} .$$

Zur besseren Übersicht formulieren wir die wichtigsten Aussagen der allgemeinen Betrachtung aus dem Abschnitt 5.2 nochmals für den eindimensionalen Fall.

**Lemma 5.21.** *Es sei  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Dann ist  $0 \oplus 1 \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  ein zyklischer Vektor für den Operator  $\mathbf{B}$ . Insbesondere hat  $\mathbf{B}$  ein einfaches Spektrum.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 5.12.  $\square$

**Theorem 5.22.** *Es sei  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Dann hat die Herglotzfunktion*

$$\phi(z) = \frac{1 + (a_1 - z)\langle v, (A_0 - z)^{-1}v \rangle}{(a_1 - z) - \langle v, (A_0 - z)^{-1}v \rangle} \text{ mit } z \in \mathbb{C}_+ \quad (5.34)$$

die Darstellung

$$\phi(z) = \int \frac{1}{t - z} d\omega(t) , \quad (5.35)$$

wobei  $\omega$  ein positives Borelmaß mit kompaktem topologischem Träger auf  $\mathbb{R}$  ist. Darüber hinaus ist  $\mathbf{B}$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ .

*Beweis.* Dies folgt alles aus Theorem 5.13, wobei man für die letzte Aussage beachten sollte, dass das spektrale Maß  $\mu := \langle 0 \oplus 1, E_{\mathbf{B}}(\cdot) 0 \oplus 1 \rangle$  äquivalent zu  $\omega$  ist. Aus Lemma 3.21 folgt, dass  $\mathbf{B}$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \omega)$  ist.  $\square$

**Lemma 5.23.** *Es gelte  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$ , wenn  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  und*

$$a_1 - \lambda = \langle v, (A_0 - \lambda)^{-1}v \rangle \quad \text{und} \quad v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \quad (5.36)$$

für  $\lambda$  erfüllt ist. Diese zwei Gleichungen können auch äquivalent als Integrale bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $m$  formuliert werden:

$$a_1 - \lambda = \int \frac{|v(t)|^2}{t - \lambda} dm(t) \quad \text{und} \quad \int \frac{|v(t)|^2}{|t - \lambda|^2} dm(t) < \infty . \quad (5.37)$$

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Lemma 5.19. Die Integralschreibweise folgt aus dem Spektralsatz in Theorem 3.11.  $\square$

Die Darstellung des Punktspektrums von  $\mathbf{B}$  ist in dieser eindimensionalen Situation durchaus vorteilhaft. Alle Eigenwerte von  $A_0$  werden durch die Störung  $V : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  verändert, sodass die Punktspektren von  $A_0$  und  $\mathbf{B}$  disjunkt sind. Insbesondere ist der angesprochene Problemfall (d) aus Lemma 5.15 deswegen immer ausgeschlossen.

Nun kommen wir auf das Borelmaß  $\omega$  aus Theorem 5.22 zurück, welches äquivalent zum Spektralmaß des Operators  $\mathbf{B}$  ist. Wir zerlegen das Maß wie üblich

$$\omega = \omega_{ac} + \omega_s = \omega_{ac} + \omega_{sc} + \omega_{pp}$$

und fragen nach minimalen Trägern des singulären Anteils und des singulär stetigen Anteils und nach der Menge der Atome des Maßes.

**Theorem 5.24.** *Es gelte  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Die Menge*

$$S_s := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid a_1 - \lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v \rangle \right\} \quad (5.38)$$

*ist ein minimaler Träger des singulären Anteils  $\omega_s$ .*

*Die Menge*

$$S_{sc} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid a_1 - \lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v \rangle, v \notin \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \right\}$$

*ist ein minimaler Träger des singulär stetigen Anteils  $\omega_{sc}$ .*

*Die Menge*

$$S_{pp} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid a_1 - \lambda = \langle v, (A_0 - \lambda)^{-1} v \rangle, v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \right\}$$

*ist der kleinste Träger von  $\omega_{pp}$ .*

*Beweis.* Nach Theorem 2.14 gilt die Aussage für  $S_s$  nach Setzen der Herglotzfunktionen mit  $-m_a(z) = a_1 - z$  und  $m_b = \langle v, (A_0 - z)^{-1} v \rangle$ .

Da nach obigem Lemma 5.23 die Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  mit der Menge  $S_{pp}$  übereinstimmen und  $\mathbf{B}$  nach Theorem 5.22 der Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \omega)$  ist, entspricht  $S_{pp}$  der Menge der Atome des Maßes  $\omega$ . Man vergleiche dazu auch Satz 3.13.

Es bleibt demnach nur die Aussage über den Träger von  $\omega_{sc}$  zu zeigen. Diese folgt hingegen direkt, wenn wir die Inklusion  $S_{pp} \subseteq S_s$  gezeigt haben, denn es gilt offensichtlich  $S_s = S_{sc} \cup S_{pp}$ .

Ist also  $\lambda \in S_{pp}$ , so gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v \rangle = \langle v, (A_0 - \lambda)^{-1} v \rangle = a_1 - \lambda$$

nach Satz 3.35, da  $v$  im Definitionsbereich von  $(A_0 - \lambda)^{-1}$  liegt. Somit erhalten wir auch  $\lambda \in S_s$ . □

Es sei betont, dass die Definition von  $S_{sc}$  in der Tat sinnvoll ist. Aus der Bedingung, dass der Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v \rangle$  endlich existiert, folgt bekanntlich, dass  $\lambda$  kein Eigenwert von  $A_0$  sein kann. Man vergleiche dazu auch Beispiel 3.34. Demnach ist der Operator  $(A_0 - \lambda)^{-1}$  als unbeschränkter Operator auf dem Definitionsbereich  $\text{Bild}(A_0 - \lambda)$  immer wohldefiniert.

Weiterhin ist zu erwähnen, dass die Menge  $S_{sc}$  nur aus Elementen des stetigen Spektrums von  $A_0$  bestehen kann. Benutzen wir Satz 1.47, welcher minimale Träger von Borelmaßen mit dem topologischen Träger in Verbindung bringt, so erhalten wir

$$\sigma_{ac}(A_0) \cup \sigma_{sc}(A_0) \supseteq \sigma_{sc}(\mathbf{B}) .$$

Insbesondere bleibt das singulär stetige Spektrum des Operators  $\mathbf{B}$  unabhängig von der Größe des Störung  $V$  beschränkt.

### 5.5.1. Ein endlichdimensionales Beispiel

Der Vorteil in diesem eindimensionalen Fall ist, dass man die Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  in einer geschlossenen Form explizit angeben kann. Dadurch kann man das Verhalten des Punktspektrums durch die Störung sehr genau beschreiben. Zur Illustration nehmen wir  $\mathfrak{H}_0$  als endlichdimensional an und skalieren die Störung  $\mathbf{B}(s) = \mathbf{A} + s\mathbf{V}$  durch einen Parameter  $s \in \mathbb{R}$ .

Es sei  $r := \dim \mathfrak{H}_0$  und die Eigenwerte von  $\mathbf{B}(s)$  seien der Größe nach geordnet  $\lambda_1(s) \leq \dots \leq \lambda_{r+n}(s)$ . Betrachtet man die Verteilung der Eigenwerte als Funktion von  $s$ , so können wir die analytische Störungstheorie anwenden. Man vergleiche dazu die Monographie von H. Baumgärtel [Bau85, Chapter 3.2.8.]. Aus dieser ist bekannt, dass für jedes feste  $j = 1, \dots, r+n$  die Abbildung  $s \mapsto \lambda_j(s)$  stetig ist.

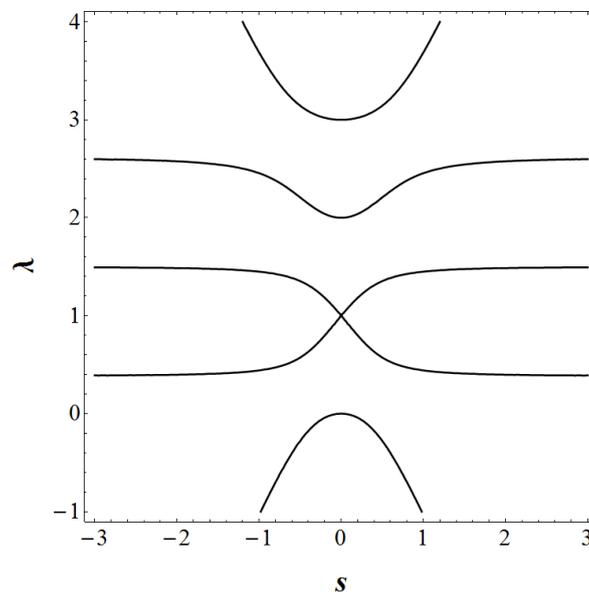


Abbildung 5.1.: Rang 1 Störung im endlichdimensionalen Fall

Da  $\mathbf{B}(s)$  für  $s \neq 0$  nach Lemma 5.12 einfaches Spektrum besitzt, schneiden sich die stetigen Graphen höchstens einmal in  $s = 0$ . Zusätzlich weiß man aus Lemma 5.23, dass die Eigenwerte von  $\mathbf{B}(s)$  für  $s \neq 0$  keine Eigenwerte mehr von  $A_0$  sein dürfen, sodass diese auf die entsprechenden Intervalle unabhängig von der Größe des Parameters  $s$  beschränkt bleiben, d. h. es können nur zwei Eigenwerte unbeschränkt anwachsen.

Die Abbildung 5.1 zeigt die Eigenwerte des Operators

$$\mathbf{B}(s) = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & & & & s \\ & 2 & & & s \\ & & 1 & & s \\ & & & 0 & s \\ \hline s & s & s & s & 1 \end{array} \right),$$

welcher für  $s = 0$  einen doppelten Eigenwert besitzt.

### 5.5.2. Riccati-Gleichung im eindimensionalen Fall

Um nun beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung zu finden, können wir die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes 5.3 verwenden und eine  $1 \times 1$ -Matrix  $Y$  suchen, die die Gleichung (5.22) erfüllt, welche sich in diesem Fall auf

$$Y = - \int \frac{|v(t)|^2}{a_1 - t - Y} dm(t)$$

reduziert. Für jedes Element  $\lambda \in S_{pp}$  ist diese Gleichung genau für  $Y = a_1 - \lambda$  erfüllt, denn:

$$- \int \frac{|v(t)|^2}{a_1 - t - Y} dm(t) = \int \frac{|v(t)|^2}{t - \lambda} dm(t) \stackrel{(5.37)}{=} a_1 - \lambda .$$

Dies liefert mit Gleichung (5.23) die  $L^2(\mathbb{R}, m)$ -Funktion

$$\mathcal{X}_*(t) := v(t) (Y - a_1 + t)^{-1} = (t - \lambda)^{-1} v(t) = ((A_0 - \lambda)^{-1} v)(t) .$$

Wir erhalten somit eine ganze Schar von Lösungen, nämlich  $X_\lambda \varphi = \langle v, (A_0 - \lambda)^{-1} \varphi \rangle$ . Dieses Vorgehen werden wir nun auf das singular stetige Spektrum ausdehnen, um auch unbeschränkte Lösungen zu finden.

Es sei für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein möglicherweise unbeschränkter linearer Operator

$$X_\lambda : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X_\lambda) \longrightarrow \mathfrak{H}_1 \quad (5.39)$$

auf dem Definitionsbereich

$$\text{Dom}(X_\lambda) := \left\{ \varphi \in \mathfrak{H}_0 \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \varphi \rangle \text{ existiert endlich} \right\}$$

definiert. Dieser ist gegeben durch

$$X_\lambda \varphi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \varphi \rangle . \quad (5.40)$$

Mit dem folgenden Satz zeigen wir, dass der minimale Träger  $S_s$  des singulären Anteils von  $\omega$  auf diese Weise eine Familie von dicht definierten Operatoren parametrisiert.

**Satz 5.25.** *Es gelte  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Für  $\lambda \in S_s$  ist der Operator  $X_\lambda$  dicht definiert und erfüllt*

$$A_0 \varphi \in \text{Dom}(X_\lambda) \text{ und } V X_\lambda \varphi \in \text{Dom}(X_\lambda) \quad (5.41)$$

für alle  $\varphi \in \text{Dom}(X_\lambda)$ .

*Beweis.* Die Menge  $D := \{p(A_0)v \mid p \text{ Polynom}\}$  liegt dicht in  $\mathfrak{H}_0$ , denn  $v$  ist ein zyklischer Vektor für  $A_0$ . Betrachten wir ein beliebiges Element  $\varphi = p(A_0)v$  dieser Menge, so gilt

$$\begin{aligned} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \varphi \rangle &= p(\lambda + i\varepsilon) \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v \rangle \\ &\quad + \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} (p(A_0) - p(\lambda + i\varepsilon)) v \rangle . \end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Summanden ist endlich nach Definition von  $S_s$ . Der zweite kann mit Hilfe des Spektralsatzes als folgendes Integral geschrieben werden:

$$\|v\|^2 \int \frac{p(\mu) - p(\lambda + i\varepsilon)}{\mu - \lambda - i\varepsilon} dm(\mu).$$

Die Mittelwertungleichung für holomorphe Funktionen (s. Lemma A.6) liefert uns auf natürliche Weise eine integrierbare Majorante, sodass für den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  der Satz von Lebesgue angewendet werden kann. Insgesamt existiert also der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \varphi \rangle$$

und ist endlich, d. h.  $D \subseteq \text{Dom}(X_\lambda)$ , sodass  $X_\lambda$  dicht definiert ist.

Für Gleichung (5.41) ist nur zu zeigen, dass für jedes  $\varphi \in \text{Dom}(X_\lambda)$  ebenfalls  $A_0\varphi \in \text{Dom}(X_\lambda)$  gilt, denn  $\text{Bild } V \subseteq \text{Dom } X_\lambda$  nach Definition von  $S_s$ . Da nach Voraussetzung  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$ , existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} (A_0 - \lambda) \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$$

und ist endlich. Man vergleiche zu der Berechnung des Grenzwertes den Satz 3.35. Obige Gleichung zeigt, dass  $(A_0 - \lambda)\varphi \in \text{Dom}(X_\lambda)$  und somit liegt auch  $A_0\varphi$  im Definitionsbereich von  $X_\lambda$ .  $\square$

Zu Beginn des Abschnittes haben wir gezeigt, dass man für Eigenwerte  $\lambda \in S_{pp}$  beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung angeben kann. Die obige Definition liefert für den singularär stetigen Anteil tatsächlich auch unbeschränkte Lösungen.

**Lemma 5.26.** *Es sei  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Für  $\lambda \in S_{sc}$  ist der Operator  $X_\lambda$  unbeschränkt.*

*Beweis.* Wir betrachten die Familie von beschränkten Operatoren  $\{X_\lambda^\varepsilon \mid \varepsilon \in (0, 1]\}$ , welche durch

$$X_\lambda^\varepsilon \varphi := \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \varphi \rangle$$

definiert wird. Man beachte, dass es sich hierbei um beschränkte lineare Funktionale handelt, die folgende Operatornorm besitzen:

$$\|X_\lambda^\varepsilon\|_{\mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1} = \|(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} v\|_{\mathfrak{H}_0} = \left( \int \frac{\|v\|^2}{|t - \lambda|^2 + \varepsilon^2} dm(t) \right)^{1/2}. \quad (5.42)$$

Nehmen wir nun an, dass auch  $X_\lambda$  beschränkt ist und in diesem Fall eindeutig auf ganz  $\mathfrak{H}_0$  stetig fortgesetzt werden kann, so gilt

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1]} |X_\lambda^\varepsilon \varphi| < \infty \quad \text{für alle } \varphi \in \mathfrak{H}_0.$$

Anwenden des Satzes von Banach-Steinhaus, siehe Theorem A.3, führt nun ebenfalls auf

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \|X_\lambda^\varepsilon\|_{\mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1} < \infty.$$

Letztendlich folgt aus Gleichung (5.42) mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz, dass auch

$$\int \frac{\|v\|^2}{|t - \lambda|^2} dm(t) < \infty$$

gilt. Dies ist gleichbedeutend mit  $v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1})$ , was allerdings im Widerspruch zu  $\lambda \in S_{sc}$  steht.  $\square$

Nach diesen Vorbetrachtungen über die Operatoren  $X_\lambda$  kommen wir abschließend zum wichtigen Ergebnis, dass diese Operatoren die Riccati-Gleichung

$$A_1 X - X A_0 - X V X + V^* = 0$$

lösen.

**Theorem 5.27.** *Es sei  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$ . Für  $\lambda \in S_s$  ist der dicht definierte Operator  $X_\lambda$  eine starke Lösung der Riccati-Gleichung. Darüber hinaus ist für  $\lambda \in S_{pp}$  der Operator beschränkt und für  $\lambda \in S_{sc}$  nicht abschließbar.*

*Beweis.* Für  $\lambda \in S_s$  ist per definitionem  $v \in \text{Dom}(X_\lambda)$  und nach Satz 5.25 gilt auch  $A_0 \text{Dom}(X_\lambda) \subseteq \text{Dom}(X_\lambda)$ .

Wir wählen  $\varphi \in \text{Dom}(X_\lambda)$  beliebig und berechnen:

$$\begin{aligned} & (A_1 X_\lambda - X_\lambda A_0 - X_\lambda V X_\lambda) \varphi \\ &= A_1 X_\lambda \varphi - X_\lambda A_0 \varphi - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v \rangle X_\lambda \varphi \\ &\stackrel{(5.38)}{=} (a_1 - (a_1 - \lambda)) X_\lambda \varphi - X_\lambda A_0 \varphi \\ &= X_\lambda (\lambda - A_0) \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} (\lambda - A_0) \varphi \rangle \\ &= -\langle v, \varphi \rangle = -V^* \varphi. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Tatsache genutzt, dass  $\lambda \in S_s$  kein Eigenwert von  $A_0$  sein kann. Man vergleiche dazu abermals Satz 3.35.

Wählen wir  $\lambda \in S_{pp}$ . Dann gilt  $v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1})$  und somit ist der Operator durch  $X_\lambda \varphi = \langle (A_0 - \lambda)^{-1} v, \varphi \rangle$  gegeben. Dieser ist offensichtlich beschränkt.

Ist  $\lambda \in S_{sc}$ , dann ist  $X_\lambda$  nach Lemma 5.26 unbeschränkt und kann als lineares Funktional nicht abschließbar sein. Vergleiche dazu auch Satz 4.5.  $\square$

**Bemerkung 5.28.** Ist  $\lambda \in S_{pp}$ , so entspricht der Graphenunterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\lambda^*)$  genau dem Eigenraum zum einfachen Eigenwert  $\lambda$ , d. h. es gilt

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\lambda^*) = \text{Bild } E_{\mathbf{B}}(\{\lambda\}). \tag{5.43}$$

Dies ist direkt aus der Eigenwertgleichung, siehe (5.26), zu erkennen. Es gilt nämlich  $y_0 = -(A_0 - \lambda)^{-1} v y_1$  für einen Vektor  $(y_0, y_1)$  aus dem Eigenraum und der adjungierte Operator ist durch  $X_\lambda^* = (A_0 - \lambda)^{-1} v$  gegeben.

Zur Vollständigkeit präsentieren wir nun den Hauptsatz von Kostykin und Makarov aus [KM05], welcher die genannten Lösungen mit Graphenunterräumen in Beziehung setzt. Dieses Ergebnis werden wir in den kommenden Abschnitten auf den allgemeinen  $n$ -dimensionalen Fall erweitern.

**Theorem 5.29.** *Es gelte  $\dim \mathfrak{H}_1 = 1$  und es seien die Mengen  $S_s$ ,  $S_{sc}$ , und  $S_{pp}$  aus Theorem 5.24 und der lineare Operator  $X_\lambda$  aus Gleichung (5.40) gegeben. Dann gilt:*

- (a) *Für jedes  $\lambda \in S_{sc}$  ist der Unterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)$  dicht und nicht abgeschlossen im Hilbertraum  $\mathfrak{H}$ .*
- (b) *Für jedes  $\lambda \in S_{pp}$  ist  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)$  ein abgeschlossener Unterraum der Kodimension 1. Darüber hinaus ist der Operator  $X_\lambda$  ein isolierter Punkt bezüglich der Operatornormtopologie in der Menge aller beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung.*

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}(\mathbf{B})$  die Menge aller  $\mathbf{B}$ -invarianten Unterräume, so ist die Abbildung  $\Psi : S_s \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{B})$  mit  $\Psi(\lambda) := \mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)$  injektiv.

*Beweis.* Aufgrund von Theorem 4.13 ist der Graphenraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)$  invariant bezüglich  $\mathbf{B}$ , sodass  $\Psi(\lambda) \in \mathcal{M}(\mathbf{B})$  für alle  $\lambda \in S_s$  gilt. Die Injektivität folgt leicht: Gilt  $\Psi(\lambda_1) = \Psi(\lambda_2)$  für zwei  $\lambda_1, \lambda_2 \in S_s$ , so muss schon  $X_{\lambda_1} = X_{\lambda_2}$  als Operatorgleichung gelten. Das heißt jedoch, dass insbesondere

$$0 = (X_{\lambda_1} - X_{\lambda_2})v \stackrel{(5.38)}{=} a_1 - \lambda_1 - (a_1 - \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$$

richtig ist.

Zu (a): Für ein  $\lambda \in S_{sc}$  wurde im vorherigen Theorem 5.27 gezeigt, dass  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)$  nicht abgeschlossen ist. Da aber  $X_\lambda$  dicht definiert ist, liegt der Kern des Operators nach Korollar 4.7 dicht in  $\mathfrak{H}_0$  und somit gilt:

$$\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)} \supseteq \mathfrak{H}_0 \oplus 0.$$

Weiterhin enthält  $\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)}$  nach Satz 4.16 ein nichtverschwindendes Element orthogonal zu  $\mathfrak{H}_0$ , also ein Element aus dem eindimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$ , sodass nur

$$\overline{\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda)} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$$

gelten kann.

Zu (b): Für  $\lambda \in S_{pp}$  ist  $X_\lambda$  eine beschränkte Lösung, sodass  $X_\lambda^*$  eine Lösung der konjugierten Riccati-Gleichung ist. Der Graphenunterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\lambda^*)$  entspricht genau dem Eigenraum zum einfachen Eigenwert  $\lambda$  und demnach gilt

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\lambda) = \mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\lambda^*)^\perp = \text{Bild } E_{\mathbf{B}}(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}).$$

Nach Theorem 4.17 ist  $X_\lambda$  ein isolierter Punkt in der Menge aller beschränkten Lösungen bezüglich der Operatornormtopologie.  $\square$

## 5.6. Der zweidimensionale Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  die Dimension  $n = 2$  besitzt und versuchen die Ergebnisse des letzten Paragraphen auf diese Situation zu übertragen. Wir werden schließlich schnell feststellen, dass schon durch diese minimale Dimensionserhöhung neue Probleme und Schwierigkeiten entstehen.

Es werden separat die verschiedenen Möglichkeiten für die Störung  $V$  präsentiert und am Ende Lösungen der Riccati-Gleichung konstruiert. Das Erarbeiten der Form der Lösungen wird uns auf den allgemeinen Fall vorbereiten, sodass die zweidimensionale Situation vor allem als der übersichtliche und anschauliche Bestandteil des Problems präsentiert wird.

### 5.6.1. Störungen vom Rang Eins

In einem ersten Schritt werden wir möglichst viele Dinge aus dem eindimensionalen Fall übernehmen, sodass die Störung  $V$  weiterhin eindimensionales Bild besitzen soll. Wir halten zur Übersicht die Voraussetzung für diesen Paragraphen fest:

**Voraussetzung 5.30.** *Wir nehmen die Generalvoraussetzung 5.1 für  $\dim \mathfrak{H}_1 = 2$  an. Die Störung  $V$  sei als Operator vom Rang Eins gegeben, d. h.  $\dim \text{Bild } V = 1$ , und zwar so, dass  $\text{Bild } V^*$  ein zyklischer Unterraum für  $A_1$  ist. Insbesondere haben sowohl  $A_0$  als auch  $A_1$  ein einfaches Spektrum.*

Die obige Voraussetzung können wir durch die Identifizierung  $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall reduzieren, dass  $A_1$  eine Diagonalmatrix ist. Weiterhin können wir durch unitäre Transformationen und Translationen erreichen, dass der Operator  $A_1$  folgende Matrixdarstellung in  $\mathbb{C}^2$  hat:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (5.44)$$

Somit erhält  $V$  folgende Blockform:

$$V = \begin{pmatrix} v & \gamma v \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (5.45)$$

Das Element  $v \in \mathfrak{H}_0$  steht für einen zyklischen Vektor für  $A_0$ .

Wir haben nun gezeigt, dass die obige Voraussetzung 5.30 äquivalent zu der folgenden ist:

**Voraussetzung 5.31.** *Wir nehmen die Generalvoraussetzung 5.1 für  $\dim \mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^2$  an. Es sei ein zyklischer Vektor  $v \in \mathfrak{H}_0$  für  $A_0$  gegeben und die Operatoren  $A_1$  und  $V$  seien durch die Matrixdarstellungen*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v & \gamma v \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  festgelegt.

Dies macht natürlich vor allem explizite Formeln übersichtlicher. Überdies schreiben wir zur Abkürzung  $\mathbb{1}_\gamma := 1 \oplus -1/\gamma \equiv (1, -1/\gamma) \in \mathfrak{H}_1$ .

**Theorem 5.32.** *Unter Voraussetzung 5.31 ist  $0 \oplus \mathbb{1}_\gamma \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$  ein zyklischer Vektor für  $\mathbf{B}$ . Insbesondere hat der Operator  $\mathbf{B}$  weiterhin ein einfaches Spektrum.*

*Beweis.* Im Beweis werden wir die kürzere Tupelschreibweise für Elemente von  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  verwenden. Wir definieren zur Übersicht die folgende Menge  $\mathcal{C}_k := \text{lin span} \{ \mathbf{B}^j(0 \oplus \mathbb{1}_\gamma) \mid j \in \{0, \dots, k\} \}$ . Offenbar liegt  $\mathbb{1}_\gamma$  im Kern von  $V$  und somit erhalten wir

$$\mathcal{C}_1 = \text{lin span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a/\gamma \end{pmatrix} \right\} = 0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

denn die Vektoren sind aufgrund von  $a \neq 0$  linear unabhängig.

Weiteres Anwenden von  $\mathbf{B}$  bringt schließlich induktiv

$$\mathcal{C}_{k+1} \ni A_0^{k-1}v \oplus 0 \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1.$$

Da  $v$  nach Voraussetzung ein zyklischer Vektor für  $A_0$  ist, ist auch  $0 \oplus \mathbb{1}_\gamma$  ein zyklischer Vektor für  $\mathbf{B}$ .  $\square$

Die Konstellation ist hier ähnlich dem eindimensionalen Fall aus dem letzten Abschnitt. Der Operator  $\mathbf{A}$  kann durchaus ein Spektrum der Multiplizität Zwei aufweisen, welches jedoch durch jede beliebige Störung im obigen Sinne in ein einfaches Spektrum überführt wird. Aus diesem Grund nimmt das folgende Theorem die gleiche Form wie Theorem 5.22 an:

**Theorem 5.33.** *Unter der Voraussetzung 5.31 hat die Herglotzfunktion*

$$\phi(z) = \text{tr} \left[ \frac{I_{\mathfrak{H}_1} + (A_1 - z)V^*(A_0 - z)^{-1}V}{(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V} \right] \quad (5.47)$$

die Darstellung

$$\phi(z) = \int \frac{1}{t - z} d\omega(t), \quad (5.48)$$

wobei  $\omega$  ein Borelmaß mit kompaktem topologischem Träger auf  $\mathbb{R}$  ist. Darüber hinaus ist  $\mathbf{B}$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ .

*Beweis.* Die Darstellung von  $\phi$  ist ein Spezialfall des Theorems 5.13 und wir wissen, dass  $\omega(\Delta) = 0$  genau dann, wenn  $\mu(\Delta) := \langle 0 \oplus \mathbb{1}_\gamma, E_{\mathbf{B}}(\Delta) 0 \oplus \mathbb{1}_\gamma \rangle = 0$ . Dies folgt wie gehabt aus Satz 3.23.

Dieses Ergebnis heißt aber nichts anderes, als dass  $\omega$  und  $\mu$  äquivalente Maße sind und aus Lemma 3.21 folgt, dass  $\mathbf{B}$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \omega)$  ist.  $\square$

Neben dem Vorteil, dass unter der Störung vom Rang Eins das Spektrum des Operators  $\mathbf{B}$  einfach ist, besteht ein weiterer Vorteil darin, die Spur der matrixwertigen Herglotzfunktion explizit berechnen zu können:

$$\phi(z) = \frac{(1 - \det(A_1 - z)) \text{tr} [V^*(A_0 - z)^{-1}V] - \text{tr}(A_1 - z)}{\det [(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V]} \quad (5.49)$$

$$= \frac{(1 + (a^2 - z^2))(1 + |\gamma|^2) \langle v, (A_0 - z)^{-1}v \rangle + 2z}{\det [(A_1 - z) - V^*(A_0 - z)^{-1}V]}. \quad (5.50)$$

Die Form der obigen skalaren Herglotzfunktion ist nun deutlich komplizierter als in Theorem 5.22 und man erkennt durch den Term  $\langle v, (A_0 - z)^{-1}v \rangle$ , dass nun auch der Zähler für den Träger des singulären Anteils von  $\omega$  beitragen kann. Wir rufen Satz 5.14 in Erinnerung, in welchem wir genau eine solche Aufteilung des minimalen Trägers vorgenommen haben.

**Satz 5.34.** *Es sei Voraussetzung 5.31 gegeben. Dann ist die Menge*

$$S_s := S_0 \cup S'_\infty \text{ mit}$$

$$S_0 := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det [(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V] = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathfrak{H}_1 \setminus \{0\} \text{ mit } (A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy \right\}$$

$$S'_\infty := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \in (-a, a), \lambda \in \sigma(A_0) \text{ und } \lambda = a \frac{|\gamma|^2 - 1}{|\gamma|^2 + 1} \right\}$$

ein minimaler Träger von  $\omega_s$ .

Man beachte, dass  $S'_\infty$  höchstens ein Element enthalten kann.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Darstellung von  $S'_\infty$ . Aus Satz 5.14 ist bekannt, dass eine reelle Zahl  $\lambda$  nur dann ein Element von  $S_\infty$  sein kann, wenn die Determinante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det [(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V]$$

nicht verschwindet und

$$\|V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty \quad (5.51)$$

gilt. Unter Voraussetzung 5.31 können wir die obige Determinante explizit berechnen:

$$\det [(A_1 - \lambda - i\varepsilon) - V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V]$$

$$= \left( (\lambda + i\varepsilon)^2 - a^2 \right) + \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}v \rangle \left( \lambda + i\varepsilon + a + |\gamma|^2 (\lambda + i\varepsilon - a) \right)$$

Da nun  $|\langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}v \rangle| \rightarrow \infty$  mit Gleichung (5.51) gefordert wird, ist die obige Determinante genau dann endlich, wenn  $|\gamma|^2 (a - \lambda) = (a + \lambda)$  erfüllt ist. Man beachte in diesem Zusammenhang das Grenzwertverhalten von Herglotzfunktionen aus Satz 2.11 und Satz 2.12.

Man beachte, dass in allen anderen Fällen, d. h. wenn die Determinante nicht endlich bleibt,  $\phi$  aus Gleichung (5.50) endlich existiert. Dies bedeutet, dass  $S_\infty^{(2)}$  aus Satz 5.14 wirklich leer ist.

Die Gleichung (5.51) kann offenbar nur für Elemente  $\lambda$  aus dem Spektrum von  $A_0$  erfüllt werden, sodass wir insgesamt  $S'_\infty \supseteq S_\infty$  gezeigt haben. Da beide Menge höchstens einelementig sind, folgt auch die Minimalitätsaussage.

Es bleibt die Darstellung von  $S_0$  zu zeigen. Die obige Berechnung der Determinante zeigt, dass für ein Element  $\lambda \in S_0$  der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V$$

endlich existieren muss. Da die Determinante verschwindet, bedeutet dies, dass ein  $0 \neq y \in \mathfrak{N}_1$  existieren muss mit

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy .$$

Die Umkehrung ist offensichtlich, sodass die Darstellung von  $S_0$  bewiesen ist.  $\square$

Der obige minimale Träger von  $S_s$  lässt schon erahnen, dass im Gegensatz zum eindimensionalen Fall nun auch Eigenwerte der Bedingungen (b), (c) oder (d) aus Lemma 5.15 angenommen werden können.

**Lemma 5.35.** *Es gelte Voraussetzung 5.31. Ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$ , wenn entweder  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  und*

$$(A_1 - \lambda)y = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy \quad \text{und} \quad v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \quad (5.52)$$

für ein  $y \notin \text{Kern } V$  erfüllt ist oder wenn

$$\lambda \in \sigma_p(A_0) \quad \text{und} \quad \lambda = a \frac{|\gamma|^2 - 1}{|\gamma|^2 + 1} \in (-a, a) \quad (5.53)$$

gilt.

*Beweis.* Wir betrachten wieder die vier Fälle aus Lemma 5.15. Bedingung (a) ist immer problemlos möglich und führt auf Gleichung (5.52). Der Fall (b) kann nicht eintreten, da dieser  $v \in \text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\})^\perp$  fordert, was aufgrund von Korollar 3.26 nicht erreichbar ist. Ebenso ist Bedingung (c) nicht erfüllbar, da ein Eigenvektor von  $A_1$  nicht im Kern des Operators  $V$  liegen kann. Dies ist ebenso Korollar 3.26 und der Tatsache geschuldet, dass  $\text{Bild } V^* = (\text{Kern } V)^\perp$  ein zyklischer Unterraum für  $A_1$  ist.

Fall (d) kann eintreten und dies bedeutet  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$ . Insbesondere gilt nach Satz 3.27

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\text{tr } V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V| = \infty ,$$

sodass nur  $y \in \text{Kern } V$  in der Gleichung

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy - V^*x \quad (5.54)$$

gelten kann. Schreiben wir nun  $y = (\gamma, -1)^T \in \text{Kern } V$ , so erhalten wir die hinreichende und notwendige Bedingung

$$\lambda = a \frac{|\gamma|^2 - 1}{|\gamma|^2 + 1}$$

für das Erfüllen von Gleichung (5.54).  $\square$

In der Tat tritt hier genau der Fall (d) ein, den wir schon als inkompatibel für Lösungen der Riccati-Gleichungen eingestuft haben. Da es sich dagegen höchstens um einen Eigenwert handelt, werden wir diesen bei der weiteren Betrachtung ausschließen.

Nun teilen wir den minimalen Träger des singulären Maßes wieder in einen kleinsten Träger für den rein atomaren Anteil und einen minimalen Träger für den singulär stetigen Anteil auf. Für letzteren sollte man beachten, dass wie im eindimensionalen Fall aus der Bedingung  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)v \rangle| < \infty$  immer folgt, dass  $\lambda$  kein Eigenwert von  $A_0$  ist, d. h.  $(A_0 - \lambda)^{-1}$  existiert als möglicherweise unbeschränkter Operator.

**Satz 5.36.** *Es gelte Voraussetzung 5.31. Dann ist die Menge*

$$S_{sc} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Es existiert ein } y \notin \text{Kern } V \text{ mit} \right. \\ \left. (A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy, \quad v \notin \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \right\}$$

ein minimaler Träger von  $\omega_{sc}$ .

Die Menge

$$S_{pp} := S_{pp}^{(1)} \cup S_{pp}^{(2)}$$

mit den Bestandteilen

$$S_{pp}^{(1)} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Es existiert ein } y \notin \text{Kern } V \text{ mit} \right. \\ \left. (A_1 - \lambda)y = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy, \quad v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \right\}$$

$$S_{pp}^{(2)} := \left\{ \lambda \in (-a, a) \mid \lambda \in \sigma_p(A_0) \quad \text{und} \quad \lambda = a \frac{|\gamma|^2 - 1}{|\gamma|^2 + 1} \right\}$$

ist der kleinste Träger von  $\omega_{pp}$ .

*Beweis.* In Satz 5.34 wurde ein minimaler Träger für  $\omega_s$  angegeben. Offensichtlich gilt  $S_0 = S_{sc} \cup S_{pp}^{(1)}$ , wobei man wieder beachten sollte, dass ein Eigenvektor des Operators  $A_1$  nicht im Kern von  $V$  liegen kann. Die Menge  $S_{pp}$  entspricht der Menge der Eigenwerten von  $\mathbf{B}$ , welcher nach Theorem 5.33 der Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}, \omega)$  ist. Dadurch ist  $S_{pp}$  nach Satz 3.13 die Menge der Atome von  $\omega$ .

Folglich muss  $S_s \setminus S_{pp}$  ein minimaler Träger des singulär stetigen Anteils von  $\omega$  sein. Da die Menge  $S'_\infty$  höchstens einelementig ist, kann dieser Punkt gegebenenfalls noch entfernt werden, sodass auch  $S_s$  ein minimaler Träger von  $\omega_s$  ist.  $\square$

Wie angesprochen möchten wir analog zum vorherigen Abschnitt vorgehen und Lösungen der Riccati-Gleichung finden. Die Mengen  $S_{pp}^{(1)}$  und  $S_{sc}$  haben in der Tat die gleiche Form wie im eindimensionalen Fall, sodass wir diese zusammenfassen:

$$S_s^{red} := S_{sc} \cup S_{pp}^{(1)} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Es existiert ein } y \notin \text{Kern } V \text{ mit} \right. \\ \left. (A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy \right\}. \quad (5.55)$$

Durch Hinzunahme eines einzelnen Punktes, d. h. durch Hinzunahme von  $S_{pp}^{(2)}$ , erhalten wir somit immer einen minimalen Träger des singulären Anteils von  $\omega$ .

Jedem Element der Menge  $S_s^{red}$  ist eindeutig ein eindimensionaler linearer Unterraum, aufgespannt durch den jeweiligen Vektor  $y$  aus Gleichung (5.55), zugeordnet. Die nächsten zwei Lemmata befassen sich mit den Eigenschaften dieser Unterräume.

**Lemma 5.37.** *Es gelte Voraussetzung 5.30. Ist  $\lambda \in S_s^{red}$  und  $y \in \mathfrak{H}_1$  der Vektor aus Gleichung (5.55), so gilt  $y \notin \text{Kern}(V)^\perp$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass für ein  $y \in \mathfrak{H}_1$  sowohl  $y \in \text{Kern}(V)^\perp = \mathbb{C} \cdot (1, \bar{\gamma})^T$  als auch  $(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy$  erfüllt ist. Daraus folgt nun die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a - \lambda \\ (-a - \lambda)\bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + |\gamma|^2) \\ (1 + |\gamma|^2)\bar{\gamma} \end{pmatrix} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v, (A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}v \rangle.$$

Diese kann nur für  $a = 0$  gelten, da  $\gamma \neq 0$  nach Voraussetzung gilt. Dies widerspricht allerdings der Voraussetzung, dass das Spektrum des Operators  $A_1$  einfach ist.  $\square$

**Lemma 5.38.** *Es gelte Voraussetzung 5.30. Es seien  $\lambda, \kappa \in S_s^{red}$  und  $y_\lambda$  bzw.  $y_\kappa$  bezeichne jeweils den Vektor aus Gleichung (5.55). Sind nun  $\lambda$  und  $\kappa$  verschieden, so sind  $y_\lambda$  und  $y_\kappa$  linear unabhängig.*

*Beweis.* Setzen wir voraus, dass  $y_\lambda$  und  $y_\kappa$  linear abhängig sind, so können wir ohne Einschränkung Gleichheit annehmen und diesen Vektor kurz mit  $y$  bezeichnen. Es gelten dann die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (A_1 - \lambda)y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy, \\ (A_1 - \kappa)y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \kappa - i\varepsilon)^{-1}Vy. \end{aligned}$$

Aus diesen ergibt sich durch Bildung der Differenz:

$$(\kappa - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^* [(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} - (A_0 - \kappa - i\varepsilon)^{-1}] Vy.$$

Da das Bild des Operators  $V^*$  endlichdimensional und somit abgeschlossen ist, gilt nach obiger Gleichung entweder  $y \in \text{Bild}(V^*) = \text{Kern}(V)^\perp$  oder  $\kappa = \lambda$ . Nach Lemma 5.37 kann nur Letzteres eintreten.  $\square$

Das obige Lemma besagt, dass zwei verschiedene Zahlen aus der Menge  $S_s^{red}$  durch ihre zugeordneten eindimensionalen Unterräume schon den ganzen Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  aufspannen. Für den nun folgenden Abschnitt über Lösungen der Riccati-Gleichung ist diese Eigenschaft wesentlich. Es sollte aber betont werden, dass so im Allgemeinen keine Orthonormalbasis des Raumes  $\mathfrak{H}_1$  gefunden wird, was einige technische Schwierigkeiten mit sich bringt.

### 5.6.2. Riccati-Gleichung im zweidimensionalen Fall

Wir nehmen in diesem Abschnitt weiterhin Voraussetzung 5.30 an und verwenden die Ergebnisse, die wir für diesen Fall erhalten haben.

Nun stellt sich die Frage, ob man für Gleichung (5.22) eine lösende  $2 \times 2$ -Matrix  $Y$  finden kann. Dies ist tatsächlich möglich, erfordert hingegen ein wenig Vorarbeit, sodass wir später auf die genaue Wahl von  $Y$  zurückkommen. Wir werden nun durch Betrachtung der adjungierten Riccati-Gleichung

$$X^* A_1 - A_0 X^* - X^* V^* X^* + V = 0 \quad (5.56)$$

sofort beschränkte Lösungen  $X^* : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  angeben.

Da der Operator  $\mathbf{B}$  ein einfaches Spektrum hat, aber der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  zweidimensional ist, benötigen wir genau zwei verschiedene Eigenwerte, um eine Lösung zu finden.

**Satz 5.39.** *Es gelte Voraussetzung 5.31. Es seien  $\lambda, \kappa \in S_{pp}^{(1)}$  zwei verschiedene Eigenwerte und  $y_\lambda$  bzw.  $y_\kappa \in \mathfrak{H}_1$  jeweils der Vektor aus Gleichung (5.55). Dann ist durch*

$$X_{\lambda, \kappa}^*(cy_\lambda + dy_\kappa) := (A_0 - \lambda)^{-1}V(cy_\lambda) + (A_0 - \kappa)^{-1}V(dy_\kappa), \quad c, d \in \mathbb{C}$$

ein beschränkter linearer Operator  $X_{\lambda, \kappa}^* : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  definiert, der die adjungierte Riccati-Gleichung (5.56) erfüllt.

*Beweis.* Wenden wir auf die adjungierte Riccati-Gleichung den Vektor  $y_\lambda$  an, so finden wir

$$\begin{aligned} X_{\lambda, \kappa}^* A_1 y_\lambda - A_0 X_{\lambda, \kappa}^* y_\lambda - X_{\lambda, \kappa}^* V^* X^* y_\lambda + V y_\lambda \\ &= X_{\lambda, \kappa}^* A_1 y_\lambda - A_0 (A_0 - \lambda)^{-1} V y_\lambda - X_{\lambda, \kappa}^* V^* (A_0 - \lambda)^{-1} V y_\lambda + V y_\lambda \\ &\stackrel{(5.52)}{=} X_{\lambda, \kappa}^* \lambda y_\lambda - A_0 (A_0 - \lambda)^{-1} V y_\lambda + V y_\lambda \\ &= (\lambda - A_0) (A_0 - \lambda)^{-1} V y_\lambda + V y_\lambda = 0. \end{aligned}$$

Mit analoger Rechnung ist die adjungierte Riccatigleichung auch für  $y_\kappa$  erfüllt, sodass sie als Operatoridentität gilt.  $\square$

Nun ist die natürliche Frage, wie man Lösungen aus dem singularär stetigen Spektrum ähnlich dem eindimensionalen Fall konstruiert. Die Definition der obigen beschränkten Lösungen zeigt, dass man durch zwei verschiedene Werte  $\lambda, \kappa \in S_s^{red}$  den zweidimensionalen Raum  $\mathfrak{H}_1$  aufspannen kann. Wie immer seien  $y_\lambda$  und  $y_\kappa$  die entsprechenden Vektoren aus Gleichung (5.55). Wir definieren nun die Projektionen

$$P_{\lambda, \kappa} : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1 \quad \text{mit Bild } P_{\lambda, \kappa} = \langle y_\lambda \rangle, \quad \text{Kern } P_{\lambda, \kappa} = \langle y_\kappa \rangle, \quad (5.57)$$

$$Q_{\lambda, \kappa} : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1 \quad \text{mit Bild } Q_{\lambda, \kappa} = \langle y_\kappa \rangle, \quad \text{Kern } Q_{\lambda, \kappa} = \langle y_\lambda \rangle, \quad (5.58)$$

welche im Allgemeinen keine Orthogonalprojektionen sind. Hier steht die Abkürzung  $\langle y \rangle := \text{lin span } \{y\}$  für die lineare Hülle des Vektors  $y \in \mathfrak{H}_1$ . Mit Hilfe dieser

Projektoren lassen sich die beschränkten Lösungen in geschlossener Form angeben. Für  $\lambda, \kappa \in S_{pp}^{(1)}$  lautet das gesuchte  $Y$  aus Gleichung (5.22)

$$Y = (A_1 - \lambda)P_{\lambda, \kappa} + (A_1 - \kappa)Q_{\lambda, \kappa}.$$

Mit Hilfe von Gleichung (5.23) erhält man in der Tat oben definierte Lösungen  $X_{\lambda, \kappa}^*$  zurück.

Nun definieren wir für zwei unterschiedliche Zahlen  $\lambda, \kappa \in S_s^{red}$  den, möglicherweise unbeschränkten Operator

$$X_{\lambda, \kappa} : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1 \quad (5.59)$$

auf dem Definitionsbereich

$$\text{Dom}(X_{\lambda, \kappa}) := \left\{ \varphi \in \mathfrak{H}_0 \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} + Q_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \kappa + i\varepsilon)^{-1} \right) \varphi \text{ existiert endlich} \right\}.$$

Dieser ist gegeben durch

$$X_{\lambda, \kappa} \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} + Q_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \kappa + i\varepsilon)^{-1} \right) \varphi. \quad (5.60)$$

Es sei auf das positive Vorzeichen in der Definition des Operators aufmerksam gemacht, welches sich im weiteren Verlauf selbst erklären wird.

Diese Operatoren sind mit ähnlichen Beweis wie im eindimensionalen Fall auf  $\mathfrak{H}_0$  dicht definiert:

**Satz 5.40.** *Es gelte Voraussetzung 5.31. Falls  $\lambda, \kappa \in S_s^{red}$  verschieden sind, ist der Operator  $X_{\lambda, \kappa}$  dicht definiert und darüber hinaus gilt:*

$$\text{Bild}(A_0 + V X_{\lambda, \kappa})|_{\text{Dom}(X_{\lambda, \kappa})} \subseteq \text{Dom}(X_{\lambda, \kappa}). \quad (5.61)$$

*Beweis.* Wir betrachten den dichten Teilraum

$$D := \{ p(A_0) V y_\lambda \mid p \text{ Polynom} \} = \{ p(A_0) V y_\kappa \mid p \text{ Polynom} \}$$

von  $\mathfrak{H}_0$ . Den Beweis können wir nun vollkommen analog zum Beweis von Satz 5.25 führen: Es sei  $\varphi = p(A_0) V y_\lambda$  ein beliebiges Element des obigen Teilraumes. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \varphi &= p(\lambda - i\varepsilon) P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} V y_\lambda \\ &\quad + P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} (p(A_0) - p(\lambda - i\varepsilon)) V y_\lambda \end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Summanden ist endlich nach Definition von  $S_s^{red}$ . Der zweite ist nach dem Spektralsatz gleich dem Integral

$$P_{\lambda, \kappa} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \bar{\gamma} & |\gamma|^2 \end{pmatrix} y_\lambda \|v\|^2 \int \frac{p(\mu) - p(\lambda - i\varepsilon)}{\mu - (\lambda - i\varepsilon)} dm(\mu), \quad (5.62)$$

welches wie in Satz 5.25 im Grenzwert endlich ist. Demnach existiert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \varphi \quad (5.63)$$

und ist endlich. Analog beweist man die Existenz und Endlichkeit von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Q_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \kappa + i\varepsilon)^{-1} \varphi, \quad (5.64)$$

d. h.  $D \subseteq \text{Dom}(X_{\lambda, \kappa})$ , sodass  $X_{\lambda, \kappa}$  dicht definiert ist.

Für Beweis von Gleichung (5.61) verwendet man, dass  $\text{Bild}(V) \subseteq \text{Dom}(X_{\lambda, \kappa})$  und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(A_0 - \lambda)\varphi = V^*\varphi$  nach Proposition 3.38 gilt.  $\square$

**Lemma 5.41.** *Es sei Voraussetzung 5.31 gegeben. Sind  $\lambda, \kappa \in S_s^{red}$  und mindestens eine der beiden Zahlen aus  $S_{sc}$ , so ist der Operator  $X_{\lambda, \kappa}$  unbeschränkt.*

*Beweis.* Es sei ohne Einschränkung  $\lambda \in S_{sc}$ . Dann betrachten wir folgende Familie von beschränkten Operatoren

$$Y^\varepsilon \varphi := P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \varphi.$$

Die Operatornorm lässt sich jeweils leicht berechnen, wenn man die Darstellung des Operators  $V^*$  aus Voraussetzung 5.31 benutzt:

$$Y^\varepsilon \varphi = \langle v, (A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \varphi \rangle P_{\lambda, \kappa}^* w.$$

Hierbei ist  $w = (1, \bar{\gamma})^T \in \mathbb{C}^2 = \mathfrak{H}_1$  und somit gilt:

$$\|Y^\varepsilon\|_{\mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1} = \|(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} v\|_{\mathfrak{H}_0} \|P_{\lambda, \kappa}^* w\|_{\mathfrak{H}_1}.$$

Nehmen wir nun an, dass der Operator  $X_{\lambda, \kappa}$  beschränkt wäre, so wäre dies auch  $Y := P_{\lambda, \kappa}^* X_{\lambda, \kappa}$ . Der Satz von Banach-Steinhaus ergibt mit analoger Rechnung wie im Beweis von Lemma 5.26, dass  $v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1})$  gelten muss. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung  $\lambda \in S_{sc}$ .  $\square$

Nun werden wir zeigen, dass die so definierten Operatoren die Riccati-Gleichung im starken Sinne lösen. Mit Hilfe der Projektionen können wir die wichtige Gleichung (5.55) umformulieren und als Operatorgleichung darstellen

$$(A_1 - \lambda)P_{\lambda, \kappa} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} V P_{\lambda, \kappa}. \quad (5.65)$$

Für den zweiten Wert  $\kappa \in S_s^{red}$  erhält man genauso:

$$(A_1 - \kappa)Q_{\lambda, \kappa} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \kappa - i\varepsilon)^{-1} V Q_{\lambda, \kappa}. \quad (5.66)$$

Da der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  endlichdimensional ist, besitzt auch  $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$  endliche Dimension und die obigen Grenzwerte sind auch in der Operatornormtopologie richtig. Weiterhin können wir so zeigen, dass die zwei Gleichungen äquivalent zu den adjungierten Formulierungen sind:

$$P_{\lambda, \kappa}^*(A_1 - \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} V \quad (5.67)$$

$$Q_{\lambda, \kappa}^*(A_1 - \kappa) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Q_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \kappa + i\varepsilon)^{-1} V. \quad (5.68)$$

Diese zwei Gleichungen und die Eigenschaft  $Q_{\lambda, \kappa} P_{\lambda, \kappa} = 0$  werden nun sehr hilfreich für den Beweis des nächsten Satzes werden.

**Theorem 5.42.** *Es gelte Voraussetzung 5.31 und es seien  $\lambda, \kappa \in S_s^{red}$  verschieden. Dann ist der Operator  $X_{\lambda, \kappa}$  eine starke Lösung der Riccati-Gleichung. Darüber hinaus ist für  $\lambda, \kappa \in S_{pp}^{(1)}$  der Operator beschränkt und im Falle  $\lambda \in S_{sc}$  oder  $\kappa \in S_{sc}$  nicht abschließbar.*

*Beweis.* Mit Hilfe der zwei Projektionen können wir die Riccati-Gleichung auch schreiben als

$$P_{\lambda, \kappa}^*(A_1 X - X A_0 - X V X + V^*) + Q_{\lambda, \kappa}^*(A_1 X - X A_0 - X V X + V^*) = 0.$$

Wir zeigen nun, dass  $X_{\lambda, \kappa}$  die erste projizierte Riccati-Gleichung löst. Man beachte dazu, dass  $P_{\lambda, \kappa}^* Q_{\lambda, \kappa}^* = 0$  gilt. Es sei  $\varphi \in \text{Dom}(X_{\lambda, \kappa})$  gewählt und dann gilt:

$$\begin{aligned} & P_{\lambda, \kappa}^*(A_1 X_{\lambda, \kappa} - X_{\lambda, \kappa} A_0 - X_{\lambda, \kappa} V X_{\lambda, \kappa})\varphi \\ & \stackrel{(5.60)}{=} P_{\lambda, \kappa}^*(A_1 X_{\lambda, \kappa}\varphi - X_{\lambda, \kappa} A_0\varphi - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} V X_{\lambda, \kappa}\varphi) \\ & \stackrel{(5.55)}{=} P_{\lambda, \kappa}^*(A_1 - (A_1 - \lambda))X_{\lambda, \kappa}\varphi - P_{\lambda, \kappa}^* X_{\lambda, \kappa} A_0\varphi \\ & = P_{\lambda, \kappa}^* X_{\lambda, \kappa}(\lambda - A_0)\varphi \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_{\lambda, \kappa}^* V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1}(\lambda - A_0)\varphi \\ & = -P_{\lambda, \kappa}^* V^*\varphi. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  gilt und somit Proposition 3.38 genutzt werden kann.

Analog zeigt man, dass  $X_{\lambda, \kappa}$  auch die zweite projizierte Riccati-Gleichung löst, sodass wir eine starke Lösung der Riccati-Gleichung gefunden haben.

Gilt nun  $\lambda, \kappa \in S_{pp}^{(1)}$ , so liegt  $v$  sowohl im Definitionsbereich von  $(A_0 - \lambda)^{-1}$  als auch von  $(A_0 - \kappa)^{-1}$  und somit gilt

$$X_{\lambda, \kappa} = P_{\lambda, \kappa}^* ((A_0 - \lambda)^{-1} V)^* + Q_{\lambda, \kappa}^* ((A_0 - \kappa)^{-1} V)^*,$$

sodass der Operator beschränkt ist. Gilt dagegen  $\lambda \in S_{sc}$  oder  $\kappa \in S_{sc}$ , so ist der Operator  $X_{\lambda, \kappa}$  nach Lemma 5.41 unbeschränkt und kann als Operator von endlichem Rang nicht abschließbar sein. Man vergleiche dazu Satz 4.6.  $\square$

Wir haben unter der Voraussetzung 5.30 eine zweiparametrische Familie von starken Lösungen der Riccati-Gleichung gefunden. Insbesondere ist die Existenz von Lösungen garantiert, wenn das singuläre Spektrum des Operators  $\mathbf{B}$  mindestens aus drei Elementen besteht, denn dann besitzt  $S_s^{red}$  mindestens zwei Elementen und das Konstruktionsverfahren aus Gleichung (5.60) ist anwendbar.

### 5.6.3. Beispiele und Folgerungen

Für den im letzten Abschnitt betrachteten zweidimensionalen Fall mit Störungen vom Rang Eins, betrachten wir nun endlichdimensionale Beispiele, die das Verhalten der Eigenwerte veranschaulichen.

**Beispiel 5.43.** Es sei auf dem Hilbertraum  $\mathfrak{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$  der folgende Operator gegeben:

$$\mathbf{B}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & s & s \\ \hline s & 1 & \\ s & & -1 \end{array} \right). \quad (5.69)$$

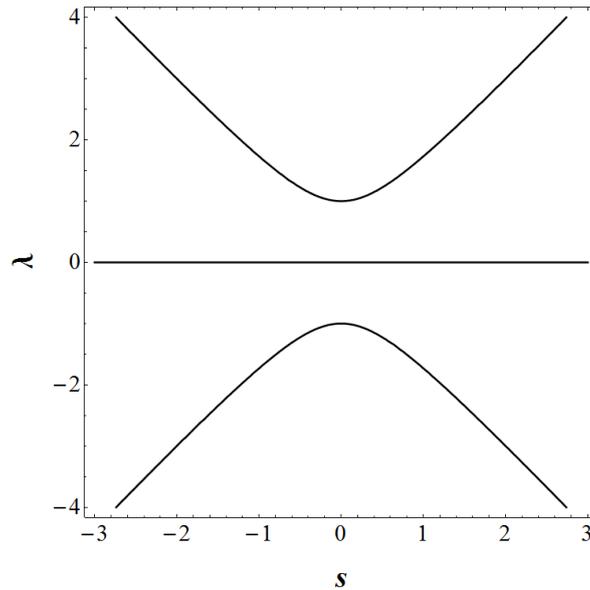


Abbildung 5.2.: Störung im endlichdimensionalen Fall - Beispiel 5.43

Das Verhalten der Eigenwerte ist in Abbildung 5.2 zu sehen und wie man erkennt, bleibt der einfache Eigenwert 0 gänzlich ungestört unabhängig von der Größe des Störungsparameters  $s$ . Dies liegt daran, dass 0 in  $S_{pp}^{(2)}$  liegt. Für Lösungen der Riccati-Gleichung kommen so nur die beiden anderen Eigenwerte in Frage, sodass wir mit Hilfe der Konstruktion aus dem letzten Abschnitt nur eine einzige beschränkte Lösung finden.

**Beispiel 5.44.** Wir demonstrieren nun noch kurz ein etwas komplizierteres Beispiel. Der Hilbertraum sei  $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2$  und der Operator gegeben durch:

$$\mathbf{B}(s) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 3 & & & s & 2s \\ & -5 & & s & 2s \\ & & 5 & s & 2s \\ \hline s & s & s & 5 & \\ 2s & 2s & 2s & & -5 \end{array} \right). \quad (5.70)$$

In diesem Beispiel hat der ungestörte Operator zwei Eigenwerte der Vielfachheit Zwei, welche aber aufgrund von Lemma 5.32 für alle  $s \neq 0$  auseinander laufen müssen. Weiterhin liegt der Eigenwert 3 in  $S_{pp}^{(2)}$  und bleibt deswegen unverändert. Man vergleiche dazu auch Abbildung 5.3.

Zum Abschluss dieser speziellen Situation beweisen wir die folgende Existenzsagen für beschränkte Lösungen.

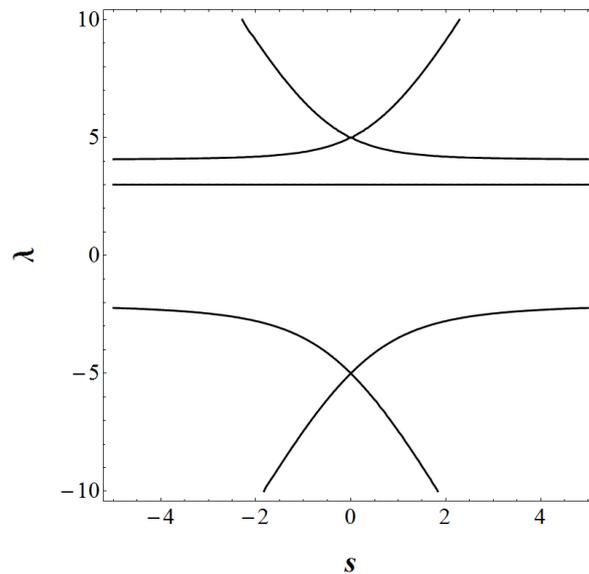


Abbildung 5.3.: Störung im endlichdimensionalen Fall - Beispiel 5.44

**Korollar 5.45.** *Unter der Voraussetzung 5.30 und der Annahme, dass das Punktspektrum von  $\mathbf{B}$  mindestens aus drei Elementen besteht, hat die Riccati-Gleichung mindestens eine beschränkte Lösung.*

*Beweis.* Da  $\sigma_p(\mathbf{B})$  wenigsten drei Elemente enthält, besteht die Menge  $S_{pp}^{(1)}$  mindestens aus zwei Elementen, sodass mit Satz 5.39 eine beschränkte Lösung konstruiert werden kann.  $\square$

**Korollar 5.46.** *Unter der Voraussetzung 5.30 hat die Riccati-Gleichung für einen endlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  mindestens eine beschränkte Lösung.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus obigem Korollar 5.45, da  $\mathbf{B}$  ein einfaches Spektrum hat und  $\dim \mathfrak{H} \geq 3$  gilt.  $\square$

#### 5.6.4. Spezielle Störungen vom Rang Eins

In Voraussetzung 5.30 haben wir angenommen, dass neben  $A_0$  auch der Operator  $A_1$  ein einfaches Spektrum besitzt. Dies war notwendig, um zu beweisen, dass auch der gestörte Operator  $\mathbf{B}$  ein einfaches Spektrum behält. Mit dieser Voraussetzung haben wir zwei spezielle Situationen ausgeschlossen. Auf der einen Seite kann der Operator  $A_1$  einen Eigenwert von doppelter Vielfachheit besitzen, und auf der anderen Seite können wir die Forderung, dass  $\dim V^*$  ein zyklischer Unterraum für  $A_1$  ist, fallen lassen.

**Voraussetzung 5.47.** *Es gelte die Generalvoraussetzung 5.1 mit  $\dim \mathfrak{H}_1 = 2$  und der Operator  $V$  sei vom Rang Eins. Zusätzlich besitze der Operator  $A_1$  kein einfaches Spektrum, d. h. es gibt einen doppelten Eigenwert  $a \in \mathbb{R}$ .*

Identifizieren wir  $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  und stellen  $A_1$  als Diagonalmatrix dar, so können wir den Störungsoperator wieder auf die Form

$$V = \begin{pmatrix} v & \gamma v \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C} \quad (5.71)$$

bringen, wobei  $v \in \mathfrak{H}_0$  für einen zyklischen Vektor für  $A_0$  steht. Den zweifachen Eigenwert von  $A_1$  bezeichnen wir mit  $a \in \mathbb{R}$ . Man kann ohne Einschränkung  $a = 0$  annehmen und folgende Charakterisierung der Eigenwerte formulieren.

**Lemma 5.48.** *Es gelte Voraussetzung 5.47. Ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$ , wenn  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  und*

$$(A_1 - \lambda)y = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy \quad \text{und} \quad v \in \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \quad (5.72)$$

für ein  $y \notin \text{Kern } V$  gilt oder wenn  $\lambda = a \in \sigma(A_1)$  und damit

$$(A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy = 0 \quad (5.73)$$

für  $y \in \text{Kern } V$  erfüllt ist.

*Beweis.* Wir verwenden Lemma 5.15 und überprüfen die vier Bedingungen aus diesem. Der Fall (a) kann wie üblich auftreten und entspricht Gleichung (5.72). Bedingung (b) ist aufgrund von Korollar 3.26 nicht zu erfüllen. Dagegen ist der Fall (c) nun durchaus möglich und führt auf Gleichung (5.73).

Die letzte Möglichkeit (d) kann nicht eintreten. Dies zeigt man besten mit der Darstellung des Operators  $V$  aus Gleichung (5.71). Aufgrund von Korollar 3.26 muss  $y$  im Kern von  $V$  liegen und somit schreibt sich die Bedingung (d) als

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & \\ & a - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle v, x \rangle \\ \langle \gamma v, x \rangle \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

für einen Eigenvektor  $x$  zum Eigenwert  $\lambda \in \sigma_p(A_0)$ . Verschwindet die Konstante  $\gamma$ , so muss  $\langle v, x \rangle = 0$  gelten, was im Widerspruch zu Satz 3.25 steht. Gilt dagegen  $\gamma \neq 0$ , so führt (5.74) auf die Gleichung

$$-\frac{1}{|\gamma|^2} \langle v, x \rangle = \langle v, x \rangle,$$

die unmöglich erfüllt sein kann.  $\square$

Auch für diesen speziellen Fall werden wir das Verhalten der Eigenwerte an einem einfachen endlichdimensionalen Beispiel demonstrieren:

**Beispiel 5.49.** Es sei  $\mathfrak{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$  und der gestörte Operator sei

$$\mathbf{B}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} 2 & s & s \\ \hline s & 1 & \\ s & & 1 \end{array} \right). \quad (5.75)$$

Wie man gut in Abbildung 5.4 erkennt, wird der doppelte Eigenwert 1 durch die Störung zu einem einfachen Eigenwert und bleibt unabhängig von der Größe der Störung ein solcher.

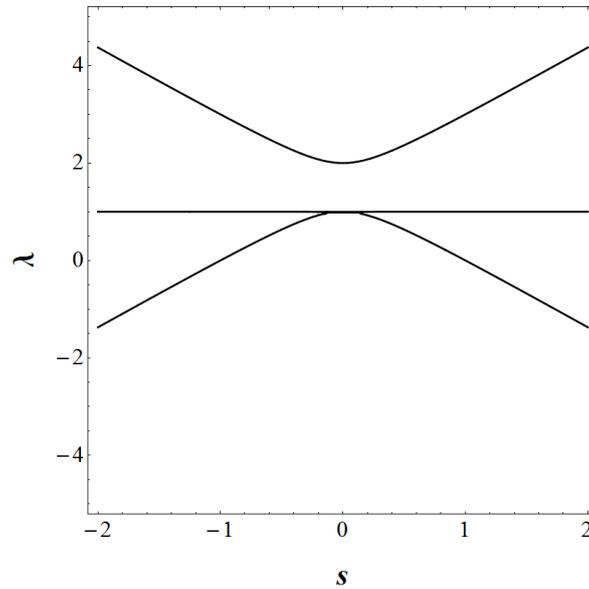


Abbildung 5.4.: Störung im endlichdimensionalen Fall - Beispiel 5.49

Analog zum vorherigen Fall, in welchem  $A_1$  ein einfaches Spektrum hat, können wir Lösungen der Riccati-Gleichungen konstruieren. Dies wiederholen wir nicht in den Details, sondern halten nur das wichtige Korollar fest:

**Korollar 5.50.** *Unter der Voraussetzung 5.47 und der Annahme, dass das Punktspektrum von  $\mathbf{B}$  wenigstens aus zwei Elementen besteht, hat die Riccati-Gleichung mindestens eine beschränkte Lösung.*

*Beweis.* Wir wissen, dass  $a \in \sigma(A_1)$  ein Eigenwert für  $\mathbf{B}$  bleibt und für jeden anderen Eigenwert  $\lambda \neq a$  der Vektor  $y_\lambda$  aus Gleichung (5.72) kein Element von Kern  $V$  ist.

Wir definieren eine Lösung der adjungierten Riccati-Gleichung durch

$$X_{\lambda,a}^*(cy_\lambda + dy_a) := (A_0 - \lambda)^{-1}V(cy_\lambda), \quad (5.76)$$

wobei  $y_a \in \text{Kern } V$  und  $c, d \in \mathbb{C}$ . Man vergleiche dazu den Beweis von Satz 5.39.  $\square$

Der einzige Fall, den wir noch nicht betrachtet haben, ist der unproblematischste, da er sich im Wesentlichen auf den eindimensionalen Fall reduziert. Wir formulieren die entsprechende Voraussetzung:

**Voraussetzung 5.51.** *Es gelte die Generalvoraussetzung 5.1 mit  $\dim \mathfrak{H}_1 = 2$  und  $V$  sei ein Operator vom Rang Eins. Der Operator  $A_1$  besitze ein einfaches Spektrum und Bild  $V^*$  sei kein zyklischer Unterraum für  $A_1$ .*

In der üblichen Matrixdarstellung bedeutet diese Voraussetzung:

$$V = \begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -a & \\ & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0. \quad (5.77)$$

Auch hier steht  $v \in \mathfrak{H}_0$  für einen zyklischen Vektor von  $A_0$ .

Die Forderung, dass Bild  $V^* = (\text{Kern } V)^\perp$  kein zyklischer Unterraum für den Operator  $A_1$  ist, führt auf die Zahl 0 in der zweiten Spalte der Blockdarstellung des Operators  $V$ .

Die Eigenwerte sind in diesem Fall genauso wie in Lemma 5.48 gegeben und die Konstruktion von Lösungen der Riccati-Gleichungen ist analog zu führen. Wir halten nur das folgende Korollar fest:

**Korollar 5.52.** *Unter der Voraussetzung 5.51 und der Annahme, dass das Punktspektrum von  $\mathbf{B}$  wenigstens aus zwei Elementen besteht, hat die Riccati-Gleichung mindestens eine beschränkte Lösung.*

*Beweis.* Dies ist wortwörtlich der gleiche Beweis wie in Korollar 5.50.  $\square$

### 5.6.5. Störungen vom Rang Zwei

Verlassen wir die Theorie der Störungen vom Rang Eins, so werden sich erwartungsgemäß viele Aussage ändern. So ist schon in diesem zweidimensionalen Fall das sehr hilfreiche Lemma 5.21 aus der eindimensionalen Situation, welches zeigte, dass das Spektrum von  $\mathbf{B}$  einfach ist, nicht mehr zu halten. Selbst unter der Forderung, dass sowohl  $A_0$  als auch  $A_1$  einfaches Spektrum haben und auch der Hilbertraum endlichdimensional ist, kann die Multiplizität auf den maximalen Wert nach Lemma 5.12 anwachsen.

Das folgende einfache endlichdimensionale Beispiel findet man in ähnlicher Art in [KMM07, Example 1.5]. Es zeigt, dass die Grenze der Multiplizität des Spektrums von  $\mathbf{B}$  in der Tat scharf ist.

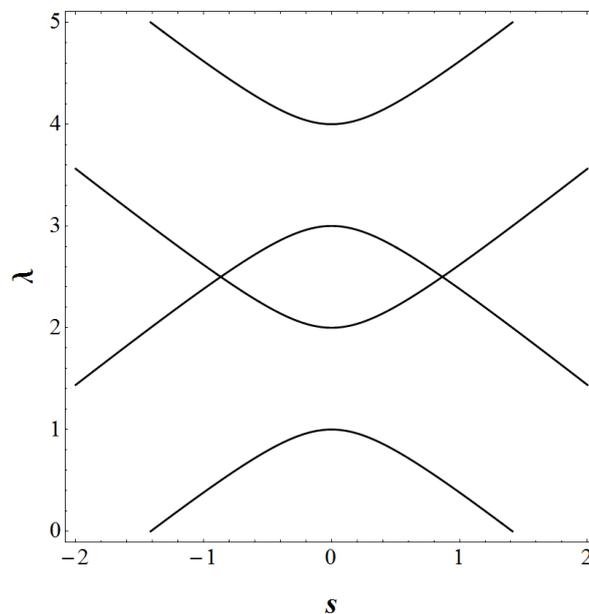


Abbildung 5.5.: Störung im endlichdimensionalen Fall - Beispiel 5.53

**Beispiel 5.53.** Es sei  $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$  und der gestörte Operator sei gegeben durch:

$$\mathbf{B}(s) = \left( \begin{array}{cc|cc} 4 & & s & \\ & 2 & & s \\ \hline s & & 3 & \\ & s & & 1 \end{array} \right). \quad (5.78)$$

Der Operator  $\mathbf{B}(\sqrt{3}/2) : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  hat dann  $\{1/2, 5/2, 9/2\}$  als Eigenwerte und insbesondere hat er kein einfaches Spektrum mehr. Man vergleiche dazu auch Abbildung 5.5.

Da  $\kappa := 5/2$  ein Eigenwert mit Vielfachheit 2 ist und wie man leicht nachrechnet  $A_1 - \kappa = V^*(A_0 - \kappa)^{-1}V$  gilt, definiert

$$X_\kappa := V^*(A_0 - \kappa)^{-1} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/3 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

eine beschränkte Lösung der Riccati-Gleichung. Eine weitere Lösung erhält man, wenn man die beiden anderen Eigenwerte,  $\lambda := 1/2$ ,  $\mu := 9/2$ , analog zum vorherigen Abschnitt kombiniert:

$$X_{\lambda,\mu} := \sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

Das Beispiel zeigt eindrucksvoll, welche wesentliche Rolle die Multiplizität des Spektrums für das Auffinden von Lösungen spielt. Insbesondere liefert ein Eigenwert mit der maximaler Vielfachheit  $n = 2$  eine Lösung, während die einfachen Eigenwerte entsprechend kombiniert werden müssen.

Der kommende Abschnitt wird sich mit allgemeinen Störungen für den Fall der endlichen Dimension  $\dim \mathfrak{H}_1 = n$  beschäftigen. Dadurch ist auch der geradehin betrachtete zweidimensionale Fall eingeschlossen, sodass wir es hier bei dem obigen Beispiel belassen.

## 5.7. Der endlichdimensionale Fall

Nun betrachten wir die allgemeine Situation, d. h. es gilt die Generalvoraussetzung 5.1 für  $\dim \mathfrak{H}_1 = n \in \mathbb{N}$ . An den Rang der Störung  $V$  stellen wir hier keine weitere Beschränkungen.

Wir beginnen die Betrachtung mit den Eigenwerten von  $\mathbf{B}$ , die die maximale Vielfachheit  $n$  aufweisen. Diese wurden in Lemma 5.19 charakterisiert und erfüllen:

$$A_1 - \lambda = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}V \quad \text{und} \quad \text{Bild } V \subseteq \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \quad (5.81)$$

Dabei ist  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  der Eigenwert von  $\mathbf{B}$ .

Wie man erkennt, bieten sich die Eigenwerte mit maximaler Vielfachheit sofort an, um Lösungen der Riccati-Gleichung zu konstruieren. Dies ist in der Tat völlig analog zu der bekannten eindimensionalen Theorie, auf was wir später kurz eingehen werden. Da man nun aber die genaue Multiplizität des Spektrums von  $\mathbf{B}$  nicht kennt und nur die obere Schranke  $n$  bekannt ist, ist es notwendig sich auch mit den Eigenwerten geringerer Vielfachheit auseinanderzusetzen.

Es sei daran erinnert, dass nach Lemma 5.18 eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau dann ein Eigenwert von  $\mathbf{B}$  mit Vielfachheit  $k$  ist, wenn genau  $k$  linear unabhängige Vektoren  $\{y^{(j)}\} \subseteq \mathfrak{H}_1$  existieren, die entweder alle Bedingung (a) oder jeweils einer der Bedingungen (b), (c) oder (d) genügen.

Alle vier Bedingungen haben hingegen gemeinsam, dass sie  $Vy \in \text{Bild}((A_0 - \lambda))$  fordern, was gleichbedeutend mit der Integralschreibweise

$$\int \frac{1}{|t - \lambda|^2} d\langle Vy, E_{A_0}(t)Vy \rangle < \infty$$

ist. Die folgt sofort aus der Betrachtung des positiven Maßes  $\mu = \langle Vy, E_{A_0}(\cdot)Vy \rangle$  und der Tatsache, dass  $\mu(\{\lambda\}) = 0$  aufgrund von  $Vy \in (\text{Bild } E_{A_0}(\lambda))^\perp$  gilt. Die Endlichkeit dieses Integrals ist also für alle Bedingungen erfüllt und notwendig, sodass wir nun den kleinsten Träger des rein atomaren Anteils von  $\omega$  folgendermaßen notieren können.

**Satz 5.54.** *Definiert man die Mengen*

$$\begin{aligned} K_{pp} &:= \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{Es existiert ein } 0 \neq y \in \mathfrak{H}_1 \text{ mit} \\ (A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy \\ \text{und } \int \frac{1}{|t - \lambda|^2} d\langle Vy, E_{A_0}(t)Vy \rangle < \infty \end{array} \right\} \text{ und} \\ T_{pp} &:= \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{Es existiert ein } 0 \neq y \in \mathfrak{H}_1 \text{ und } 0 \neq x \in \text{Bild } E_{A_0}(\{\lambda\}) \\ (A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy - V^*x \\ \text{und } \int \frac{1}{|t - \lambda|^2} d\langle Vy, E_{A_0}(t)Vy \rangle < \infty \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

so ist

$$S_{pp} := K_{pp} \cup T_{pp} \quad (5.82)$$

der kleinster Träger für den rein atomaren Teil  $\omega_{pp}$ .

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 5.18. Die Menge  $K_{pp}$  deckt die Bedingungen (a), (b) und (c) ab, während die Menge  $T_{pp}$  nur die Eigenwerte enthält, die auch Bedingung (d) genügen.

Man beachte, dass für  $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$  die Gleichung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}Vy$$

gilt, wenn  $Vy$  im Definitionsbereich von  $(A_0 - \lambda)^{-1}$  liegt. Dies wurde in Proposition 3.38 bewiesen. Somit ist auch der Fall (a) in der Beschreibung der Menge  $K_{pp}$  enthalten.  $\square$

Wir bemerken, dass sich zur Konstruktion von beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung nur die Menge  $K_{pp}$  anbietet. Dies ist vollkommen analog zur Betrachtung

im zweidimensionalen Fall. Bei Eigenwerten aus der Menge  $T_{pp}$  verhindert der nicht-verschwindende Term  $V^*x$  die Konstruktion einer Lösung. Deshalb werden wir diese im weiteren Vorgehen ausschließen.

Nun werden wir durch eine ähnliche Aufteilung einen minimalen Träger für den singular stetigen Anteil angeben.

**Satz 5.55.** *Die Menge*

$$S_{sc} := S_s \setminus S_{pp} \quad (5.83)$$

*ist ein minimaler Träger für den singular stetigen Teil  $\omega_{sc}$ .*

*Die Menge*

$$K_{sc} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{Es existiert ein } 0 \neq y \in \mathfrak{H}_1 \text{ mit} \\ (A_1 - \lambda)y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}Vy \\ \text{und } \int \frac{1}{|t - \lambda|^2} d\langle Vy, E_{A_0}(t)Vy \rangle = \infty \end{array} \right\}$$

*ist eine Teilmenge von  $S_{sc}$ .*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus den Darstellungen von  $S_s$  aus Satz 5.14 und von  $S_{pp}$  aus Satz 5.54.  $\square$

Wie zu Beginn des Abschnittes erwähnt, sind die Eigenwerte mit maximaler Vielfachheit auf Anhieb für das Auffinden einer Lösung der Riccati-Gleichung hilfreich. Analog kann man auch vom singular stetigen Anteil die passende Menge abspalten.

**Bemerkung 5.56.** Betrachten wir folgende Teilmengen des minimalen Trägers  $S_s$  aus dem Satz 5.14

$$K_{pp}^{(n)} = \{ \lambda \in S_s \mid (A_1 - \lambda) = V^*(A_0 - \lambda)^{-1}V, \text{ Bild } V \subseteq \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \}$$

$$K_{sc}^{(n)} = \left\{ \lambda \in S_s \mid \begin{array}{l} (A_1 - \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V, \\ \forall e_j \notin \text{Dom}((A_0 - \lambda)^{-1}) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\},$$

so sind diese (möglicherweise leere) Teilmengen des kleinsten Trägers von  $\omega_{pp}$  bzw. des minimalen Trägers von  $\omega_s$  aus Satz 5.55.

## 5.8. Riccati-Gleichung im endlichdimensionalen Fall

In diesem Unterabschnitt betrachten wir die Riccati-Gleichung für den Fall einer allgemeinen Störung  $V$  und beliebiger endlicher Dimension von  $\mathfrak{H}_1$ . Zur Konstruktion von Lösungen gehen wir ähnlich dem zweidimensionalen Fall vor, wobei wir allerdings eine sinnvolle Notationen wählen müssen, um die Übersicht zu gewährleisten.

**Definition 5.57.** Wir betrachten die Menge  $\tilde{S}_s := K_{pp} \cup K_{sc}$  aus obigen Satz 5.54 bzw. Satz 5.55. Nach den genannten Sätzen existiert für jedes Element  $\lambda$  aus dieser Menge ein Vektor  $y_\lambda \in \mathfrak{H}_1$ , welcher

$$(A_1 - \lambda)y_\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}V y_\lambda \quad (5.84)$$

erfüllt.

Wir definieren die Menge

$$R := \left\{ (\lambda, y_\lambda) \in \tilde{S}_s \times \mathfrak{H}_1 \mid y_\lambda \text{ erfüllt Gleichung (5.84) für } \lambda \in \tilde{S}_s \right\} .$$

Gibt es nun  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K_{pp} \cup K_{sc}$ , nicht notwendigerweise verschieden, in der Art, dass die Vektoren  $y_{\lambda_1}, \dots, y_{\lambda_n}$  linear unabhängig sind, so schreiben wir

$$\Lambda := \{(\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n})\} \subseteq R$$

und definieren für  $k = 1, \dots, n$  die folgenden Projektoren:

$$P_\Lambda^{(k)} : \mathfrak{H}_1 \longrightarrow \mathfrak{H}_1 , \quad (5.85)$$

$$\text{Bild } P_\Lambda^{(k)} = \text{lin span } \{y_{\lambda_k}\} , \quad (5.86)$$

$$\text{Kern } P_\Lambda^{(k)} = \text{lin span } \{y_{\lambda_j} \mid j \neq k\} . \quad (5.87)$$

Es sei nochmals ausdrücklich erwähnt, dass die Menge  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  nicht unbedingt aus  $n$  verschiedenen Elementen bestehen muss, sondern man muss nur genau  $n$  linear unabhängige Vektoren finden, die jeweils Gleichung (5.84) genügen. Betrachten wir einen Eigenwert, so können wir diesen zum Beispiel so oft wählen wie es seine Vielfachheit zulässt. Da der endlichdimensionale Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  durch die linear unabhängigen Vektoren  $y_{\lambda_1}, \dots, y_{\lambda_n}$  aufgespannt wird, nennen wir eine Teilmenge  $\Lambda \subseteq R$  mit den obigen Eigenschaften *aufspannend gewählt*.

Für die Menge der  $n$ -elementigen aufspannenden Teilmengen schreiben wir abkürzend  $\mathcal{S}_n$ , d. h.

$$\mathcal{S}_n := \{ \Lambda \subseteq R \mid \Lambda \text{ besitzt } n \text{ Elemente und ist aufspannend gewählt} \} . \quad (5.88)$$

Für eine aufspannend gewählte Menge  $\Lambda \in \mathcal{S}_n$  kann die Gleichung (5.84) jeweils als Operatoridentität umgeschrieben werden:

$$(A_1 - \lambda_k)P_\Lambda^{(k)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda_k - i\varepsilon)^{-1}V P_\Lambda^{(k)} . \quad (5.89)$$

Dabei ist  $k = 1, \dots, n$  und der Grenzwert im Sinne der Operatornorm zu verstehen. Wir benötigen später wieder die äquivalente konjugierte Formulierung:

$$(P_\Lambda^{(k)})^*(A_1 - \lambda_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (P_\Lambda^{(k)})^* V^*(A_0 - \lambda_k + i\varepsilon)^{-1}V . \quad (5.90)$$

**Definition 5.58.** Für  $\Lambda := \{(\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n})\} \in \mathcal{S}_n$  aufspannend gewählt, definieren wir einen möglicherweise unbeschränkten Operator

$$X_\Lambda : \mathfrak{H}_0 \supseteq \text{Dom}(X_\Lambda) \longrightarrow \mathfrak{H}_1 \quad (5.91)$$

auf dem Definitionsbereich

$$\text{Dom}(X_\Lambda) := \left\{ \varphi \in \mathfrak{H}_0 \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^n (P_\Lambda^{(j)})^* V^* (A_0 - \lambda_j + i\varepsilon)^{-1} \varphi \text{ existiert endlich} \right\}.$$

Dieser ist gegeben durch

$$X_\Lambda \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^n (P_\Lambda^{(j)})^* V^* (A_0 - \lambda_j + i\varepsilon)^{-1} \varphi. \quad (5.92)$$

Für die Operatoren  $X_\Lambda$  kann man die aus der ein- und zweidimensionalen Betrachtung bekannten Aussagen beweisen. Insbesondere stellt  $X_\Lambda$  eine starke Lösung der Riccati-Gleichung dar. Die verwendeten Techniken unterscheiden sich nur in Details, sodass auch die Beweise analog geführt werden können.

**Satz 5.59.** *Ist  $\Lambda \in \mathcal{S}_n$  aufspannend gewählt, so ist der Operator  $X_\Lambda$  dicht definiert und darüber hinaus gilt:*

$$\text{Bild}(A_0 + VX_\Lambda)|_{\text{Dom}(X_\Lambda)} \subseteq \text{Dom}(X_\Lambda). \quad (5.93)$$

*Beweis.* Die Menge  $M := \{p(A_0)w \mid p \text{ Polynom}, w \in \text{Bild } V\}$  liegt dicht in  $\mathfrak{H}_0$ , da  $\text{Bild } V$  zyklischer Unterraum von  $A_0$  ist. Betrachten wir ein beliebiges Element aus  $M$ , so ist dies eine Linearkombination von Elementen der Form  $p(A_0)Vy_{\lambda_k}$ . Wir wählen aus diesem Grund ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  und setzen  $\varphi = p(A_0)Vy_{\lambda_k}$ . Dann gilt für ein  $m \in \{1, \dots, n\}$  Folgendes:

$$\begin{aligned} (P_\Lambda^{(m)})^* V^* (A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \varphi &= p(\lambda_k - i\varepsilon) (P_\Lambda^{(m)})^* V^* (A_0 - \lambda_k + i\varepsilon)^{-1} Vy_{\lambda_k} \\ &\quad + (P_\Lambda^{(m)})^* V^* (A_0 - \lambda_k + i\varepsilon)^{-1} (p(A_0) - p(\lambda_k - i\varepsilon)) Vy_{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Summanden ist endlich nach Gleichung (5.90).

Den zweiten Summanden betrachten wir komponentenweise, indem wir das Skalarprodukt mit  $y_{\lambda_m}$  berechnen und den Spektralsatz verwenden:

$$\begin{aligned} &\left\langle y_{\lambda_m}, (P_\Lambda^{(m)})^* V^* (A_0 - \lambda_k + i\varepsilon)^{-1} (p(A_0) - p(\lambda_k - i\varepsilon)) Vy_{\lambda_k} \right\rangle_{\mathfrak{H}_0} \\ &= \int \frac{p(t) - p(\lambda_k - i\varepsilon)}{t - \lambda_k + i\varepsilon} d\langle VP_\Lambda^{(m)} y_{\lambda_m}, E_{A_0}(t) Vy_{\lambda_k} \rangle_{\mathfrak{H}_0} \\ &= \int \frac{p(t) - p(\lambda_k - i\varepsilon)}{t - (\lambda_k - i\varepsilon)} d\langle y_{\lambda_m}, V^* E_{A_0}(t) Vy_{\lambda_k} \rangle_{\mathfrak{H}_1} \end{aligned}$$

Hier wird über komplexe Maße integriert, auf welche dabei aufgrund der Mittelwertgleichung für holomorphe Funktionen der Satz von Lebesgue für den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  angewendet werden kann. Demnach existiert für alle  $m \in \{1, \dots, n\}$  der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (P_\Lambda^{(m)})^* V^* (A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} \varphi \quad (5.94)$$

und ist endlich. Wir haben somit  $M \subseteq \text{Dom}(X_\Lambda)$  gezeigt und dies bedeutet, dass der Operator  $X_\Lambda$  dicht definiert ist.

Für den Beweis von Gleichung (5.93) beachte man, dass nach Gleichung (5.90) immer  $\text{Bild}(V) \subseteq \text{Dom}(X_\Lambda)$  gilt und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V^*(A_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1}(A_0 - \lambda)\varphi = V^*\varphi$$

für  $\varphi \in \text{Dom}(X_\Lambda)$  erfüllt ist. Dazu verwendet man Proposition 3.39. Wir erhalten demnach, dass auch  $(A_0 - \lambda)\varphi \in \text{Dom}(X_\Lambda)$  gilt. Insgesamt ist also Gleichung (5.93) gezeigt.  $\square$

**Lemma 5.60.** *Es sei  $\Lambda := \{(\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n})\} \in \mathcal{S}_n$  aufspannend gewählt und mindestens eine der Zahlen  $\lambda_j$  aus  $K_{sc}$ . Dann ist der Operator  $X_\Lambda$  unbeschränkt.*

*Beweis.* Es sei  $m \in \{1, \dots, n\}$  so gewählt, dass  $\lambda_m$  in  $K_{sc}$  liegt. Dann betrachten wir folgende Familie von beschränkten Operatoren  $Y^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1)$  für  $\varepsilon \in (0, 1]$  definiert durch

$$Y^\varepsilon \varphi := (P_\Lambda^{(m)})^* V^*(A_0 - \lambda_m + i\varepsilon)^{-1} \varphi.$$

Die Operatornorm berechnen wir über den adjungierten Operator und erhalten

$$\begin{aligned} \|Y^\varepsilon\|_{\mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1} &= \|(Y^\varepsilon)^*\|_{\mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0} = \left\| (A_0 - \lambda_m - i\varepsilon)^{-1} V P_\Lambda^{(m)} \right\|_{\mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0} \\ &= |\alpha_m| \left\| (A_0 - \lambda_m - i\varepsilon)^{-1} V y_{\lambda_m} \right\|_{\mathfrak{H}_0}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\alpha_m \in \mathbb{C}$  eine Konstante, welche nur von  $m$  abhängt. Man erhält diese Konstante, da  $P_\Lambda^{(m)}$  ein Projektionsoperator im endlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  ist. Mit Hilfe des Spektralsatzes schreibt sich die Operatornorm als

$$\|Y^\varepsilon\|_{\mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1} = |\alpha_m| \left( \int \frac{1}{|t - \lambda_m|^2 + \varepsilon^2} d\langle V y_{\lambda_m}, E_{A_0}(t) V y_{\lambda_m} \rangle \right)^{1/2}. \quad (5.95)$$

Nehmen wir nun an, dass der Operator  $X_\Lambda$  beschränkt wäre, so wäre dies auch  $Y := (P_\Lambda^{(m)})^* X_\Lambda$ . Der Operator  $Y$  ist dann auf ganz  $\mathfrak{H}_0$  stetig fortsetzbar, sodass gilt:

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \|Y^\varepsilon \varphi\|_{\mathfrak{H}_1} < \infty \quad \text{für alle } \varphi \in \mathfrak{H}_0.$$

Der Satz von Banach-Steinhaus aus Theorem A.3 impliziert nun:

$$\sup_{\varepsilon \in (0, 1]} \|Y^\varepsilon\|_{\mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1} < \infty.$$

Letztendlich führt Anwenden des Satzes von der monotonen Konvergenz auf die Gleichung (5.95) zu

$$\int \frac{1}{|t - \lambda_m|^2} d\langle V y_{\lambda_m}, E_{A_0}(t) V y_{\lambda_m} \rangle < \infty,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung  $\lambda_m \in K_{sc}$  steht.  $\square$

**Theorem 5.61.** *Es sei  $\Lambda := \{(\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n})\} \in \mathcal{S}_n$  aufspannend gewählt. Dann ist der Operator  $X_\Lambda$  eine starke Lösung der Riccati-Gleichung. Darüber hinaus ist für  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$  der Operator beschränkt und für alle anderen Fälle nicht abschließbar.*

*Beweis.* Mit Hilfe der Projektionen können wir die Riccati-Gleichung auch schreiben als

$$\sum_{j=1}^n (P_{\Lambda}^{(j)})^* (A_1 X - X A_0 - X V X + V^*) = 0.$$

Wir zeigen nun, dass  $X_{\Lambda}$  jede projizierte Riccati-Gleichung einzeln löst. Es sei dafür  $\varphi \in \text{Dom}(X_{\Lambda})$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$  fest gewählt. Man beachte in der folgenden Rechnung, dass

$$(P_{\Lambda}^{(k)})^* (P_{\Lambda}^{(j)})^* = 0 \quad \text{für } j \neq k$$

gilt. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} & (P_{\Lambda}^{(k)})^* (A_1 X_{\Lambda} - X_{\Lambda} A_0 - X_{\Lambda} V X_{\Lambda}) \varphi \\ & \stackrel{(5.92)}{=} (P_{\Lambda}^{(k)})^* \left( A_1 X_{\Lambda} \varphi - X_{\Lambda} A_0 \varphi - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (P_{\Lambda}^{(k)})^* V^* (A_0 - \lambda_k - i\varepsilon)^{-1} V X_{\Lambda} \varphi \right) \\ & \stackrel{(5.90)}{=} (P_{\Lambda}^{(k)})^* (A_1 - (A_1 - \lambda_k)) X_{\Lambda} \varphi - (P_{\Lambda}^{(k)})^* X_{\Lambda} A_0 \varphi \\ & = (P_{\Lambda}^{(k)})^* X_{\Lambda} (\lambda_k - A_0) \varphi \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (P_{\Lambda}^{(k)})^* V^* (A_0 - \lambda_k - i\varepsilon)^{-1} (\lambda_k - A_0) \varphi \\ & = -(P_{\Lambda}^{(k)})^* V^* \varphi. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt Proposition 3.39 verwendet. Der Operator  $X_{\Lambda}$  ist demnach eine starke Lösung der Riccati-Gleichung.

Gilt nun  $\Lambda \subseteq K_{pp}$ , so definieren wir den folgenden beschränkten linearen Operator  $Z : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$  durch:

$$Zy := \text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^n (A_0 - \lambda_j - i\varepsilon)^{-1} V P_{\Lambda}^{(j)} y. \quad (5.96)$$

Dieser ist nach Proposition 3.40 wohldefiniert, da  $V P_{\Lambda}^{(j)} y \in \text{Bild}(A_0 - \lambda_j)$  für jedes  $j = 1, \dots, n$  und jedes  $y \in \mathfrak{H}_1$  gilt. Für  $\varphi \in \text{Dom}(X_{\Lambda})$  und  $y \in \mathfrak{H}_1$  zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned} \langle \varphi, Zy \rangle_{\mathfrak{H}_0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \varphi, \sum_{j=1}^n (A_0 - \lambda_j - i\varepsilon)^{-1} V P_{\Lambda}^{(j)} y \right\rangle_{\mathfrak{H}_0} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \sum_{j=1}^n (P_{\Lambda}^{(j)})^* V^* (A_0 - \lambda_j + i\varepsilon)^{-1} \varphi, y \right\rangle_{\mathfrak{H}_1} = \langle X_{\Lambda} \varphi, y \rangle_{\mathfrak{H}_1}, \end{aligned}$$

dass  $Z^* \supseteq X_{\Lambda}$  gilt. Insbesondere ist  $X_{\Lambda}$  abschließbar und somit als Operator von endlichem Rang nach Satz 4.6 beschränkt.

Gilt dagegen  $\lambda_k \in K_{sc}$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ , so ist der Operator  $X_{\Lambda}$  unbeschränkt und kann als Operator von endlichem Rang nicht abschließbar sein. Man vergleiche dazu auch den allgemeinen Satz 4.6.  $\square$

**Proposition 5.62.** *Es sei  $\Lambda := \{(\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n})\} \in \mathcal{S}_n$  aufspannend gewählt und  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$ . Zusätzlich sei jeder Eigenwert  $\lambda_j$  gemäß seiner Vielfachheit oft in  $\Lambda$  vertreten. Dann entspricht der Graphenunterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*)$  genau dem Vektorraum, der von den Eigenräumen der Eigenwerten  $\lambda_j$  aufgespannt wird, d. h. es gilt*

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*) = \text{Bild } E_{\mathbf{B}}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}) . \quad (5.97)$$

*Beweis.* Man betrachte ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  und den adjungierten Operator  $X_\Lambda^*$ , der für einen Eigenvektor  $y_{\lambda_j}$  zum Eigenwert  $\lambda_j$  Folgendes erfüllt:

$$X_\Lambda^* y_{\lambda_j} = \text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A_0 - \lambda_j - i\varepsilon)^{-1} V y_{\lambda_j} .$$

Dies folgt direkt aus Gleichung (5.96). Mit der obigen Darstellung und der Eigenwertgleichung (5.26) ist die Inklusion

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*) \supseteq \text{Bild } E_{\mathbf{B}}(\{\lambda_j\})$$

gezeigt.

Die andere Inklusion zeigt man nun leicht durch Zerlegen der Eigenvektoren, wobei man Proposition 3.40 berücksichtigen sollte.  $\square$

Der Hauptsatz aus [KM05] kann auf die allgemeine Situation in folgender Form ausgedehnt werden:

**Theorem 5.63.** *Es gelte  $\dim \mathfrak{H}_1 = n$  und es seien die Mengen  $K_{sc}$  und  $K_{pp}$  nach Satz 5.54 und Satz 5.55 gegeben. Weiterhin sei  $\Lambda := \{(\lambda_1, y_{\lambda_1}), \dots, (\lambda_n, y_{\lambda_n})\} \in \mathcal{S}_n$  aufspannend gewählt.*

- (a) *Ist mindestens eine Zahl  $\lambda_j$  aus  $S_{sc}$ , so ist der Unterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda)$  nicht abgeschlossen in  $\mathfrak{H}$ .*
- (b) *Für  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$  ist  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda)$  ein abgeschlossener Unterraum der Kodimension  $n$ .*
- (c) *Sind die Eigenwerte  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$  entsprechend ihrer Vielfachheit in  $\Lambda$  vertreten, so ist der Operator  $X_\Lambda$  ein isolierter Punkt in der Menge aller beschränkten Lösungen der Riccati-Gleichung bezüglich der Operatornormtopologie.*

*Beweis.* Nach Theorem 4.13 ist  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda)$  ein  $\mathbf{B}$ -invarianter Unterraum.

(a) Nach Theorem 5.61 ist der Operator  $X_\Lambda$  nicht abschließbar, insbesondere ist der Graphenraum nicht abgeschlossen.

(b) Für  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$  ist  $X_\Lambda$  beschränkt und der adjungierte Operator  $X_\Lambda^*$  löst die adjungierte Riccati-Gleichung. Der  $n$ -dimensionale Graphenunterraum  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*)$  ist invariant unter  $\mathbf{B}$ , sodass  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda) = \mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*)^\perp$  die Kodimension  $n$  hat.

(c) Aus der obigen Proposition 5.62 ist bekannt, dass  $\mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*)$  genau dem Untervektorraum von  $\mathfrak{H}$  entspricht, welcher durch die Eigenräume der Eigenwerte  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subseteq K_{pp}$  aufgespannt wird. Demnach gilt:

$$\mathcal{G}(\mathfrak{H}_0, X_\Lambda) = \mathcal{G}(\mathfrak{H}_1, -X_\Lambda^*)^\perp = \text{Bild } E_{\mathbf{B}}(\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}) .$$

Theorem 4.17 besagt nun, dass  $X_\Lambda$  ein isolierter Punkt in der Menge aller beschränkten Lösungen bezüglich der Operatornormtopologie ist.  $\square$

## 5.9. Ausblick

Vergleicht man die Situation des eindimensionalen Falls aus Abschnitt 5.5 mit dem allgemeinen endlichdimensionalen Fall des letzten Abschnittes, so ist der wesentliche Unterschied, dass man nicht mehr den kompletten Träger  $S_s$  des singularär stetigen Anteils für Lösungen der Riccati-Gleichung nutzen kann. Das Beispiel 5.20 demonstriert, dass selbst im endlichdimensionalen Fall nicht alle Eigenwerte für Lösungen genutzt werden können.

Aus diesem Grund konnten wir den Existenzsatz für beschränkte Lösungen der Riccati-Gleichung im endlichdimensionalen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  nur unter der Bedingung beweisen, dass die Spektren von  $A_0$  und  $\mathbf{B}$  disjunkt sind (vgl. dazu Korollar 5.5). Diese Bedingung kann man insofern abschwächen, als dass man nur die Existenz von Eigenwerten, die Bedingung (d) in Lemma 5.15 erfüllen, ausschließen muss.

Diesbezüglich stellen sich nun zwei Fragen: Gibt es weitere und schwächere Bedingungen, die solche Eigenwerte für den gestörten Operator ausschließen, ohne dass man das Spektrum von  $\mathbf{B}$  kennen muss? Kann man sogar zeigen, dass diese speziellen Eigenwerte in einem gewissen Sinne nur selten auftreten, sodass es immer genügend andere Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  gibt, die Lösungen der Riccati-Gleichung liefern?

Ein weiterer großer Unterschied zur eindimensionalen Behandlung aus [KM05] besteht in den zusätzlichen Freiheitsgraden, die der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathfrak{H}_1$  in der allgemeinen Betrachtung bietet. Es reicht nun nicht mehr aus, dass das singularär stetige Spektrum von  $\mathbf{B}$  nicht leer ist, um eine Familie von nichtabgeschlossenen  $\mathbf{B}$ -invarianten Unterräumen anzugeben. Man muss zusätzlich fordern, dass der Hilbertraum  $\mathfrak{H}_1$  im angegebenen Sinne aufgespannt wird. Auch hier stellt sich die Frage, ob dies durch geeignete Voraussetzungen an die Operatoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{V}$  garantiert werden kann.



## A. Anhang

Dieses zusätzliche Kapitel beinhaltet bekannte Sätze und technische Hilfsmittel, welche in der Arbeit verwendet werden und hier zur Ergänzung und zum Nachschlagen mit aufgeführt werden. Bis auf eine Ausnahme werden keine Beweise ausgeführt, sondern nur auf die entsprechende Literatur verwiesen.

**Satz A.1.** *Es sei  $\mathfrak{H}$  ein Hilbertraum und  $t$  eine beschränkte Sesquilinearform, d. h. es existiert ein  $C > 0$  mit  $|t(y, x)| \leq C\|x\|\|y\|$  für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ . Dann existiert genau ein linearer Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  mit*

$$t(y, x) = \langle y, Tx \rangle \quad (\text{A.1})$$

für alle  $x, y \in \mathfrak{H}$ .

*Beweis.* Siehe [Wei80, Theorem 5.35]. □

**Satz A.2** (Polarisierungsidentität). *Es sei  $X$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{C}$  und  $s : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform, welche linear im zweiten Argument ist, und  $q(x) := s(x, x)$  für  $x \in X$  die zugeordnete quadratische Form. Dann gilt die Polarisierungsidentität:*

$$s(x, y) = \frac{1}{4} [q(x + y) - q(x - y) - iq(x + iy) + iq(x - iy)] , \quad x, y \in X . \quad (\text{A.2})$$

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [Tes09]. □

**Theorem A.3** (Satz von Banach-Steinhaus). *Es sei  $X$  ein Banachraum und  $Y$  ein normierter Raum. Für eine Indexmenge  $I$  sei  $\{T_i \in \mathcal{L}(X, Y) \mid i \in I\}$  eine Familie von stetigen Operatoren.*

*Aus der punktmäßigen Beschränktheit*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y < \infty \quad \text{für alle } x \in X$$

*folgt dann die gleichmäßige Beschränktheit*

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{X \rightarrow Y} .$$

*Beweis.* Siehe [Wer05, Theorem IV.2.1.]. □

**Lemma A.4** (Cantorsches Diagonalverfahren). *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subseteq X$  eine kompakte Teilmenge und für jedes  $N \in \mathbb{N}$  existiere eine Folge*

$$\left( x_k^{(N)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K . \quad (\text{A.3})$$

*Dann existiert eine Teilfolge  $(k_\nu)_\nu \subseteq \mathbb{N}$  mit  $k_{\nu+1} > k_\nu$  derart, dass für alle natürliche Zahlen  $N$  der Grenzwert*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{k_\nu}^{(N)} \quad (\text{A.4})$$

*existiert.*

*Beweis.* Zur Vollständigkeit führen wir diesen elementaren Beweis aus. Der metrische Raum  $K$  ist kompakt und somit folgenkompakt, d. h. für die Folge  $(x_k^{(1)})_k$  gibt es eine Teilfolge  $j_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , kurz mit  $j_1(\nu)$  bezeichnet, für die der Grenzwert

$$y_1 := \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{j_1(\nu)}^{(1)} \quad (\text{A.5})$$

existiert. Betrachten wir nun die Folge  $(x_{j_1(\nu)}^{(2)})_\nu$ , so existiert auch für diese eine Teilfolge  $j_2(\nu)$  von  $j_1(\nu)$ , für die

$$y_2 := \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{j_2(\nu)}^{(2)} \quad (\text{A.6})$$

existiert. Führen wir dieses Prinzip weiter, erhalten wir demnach für jede natürliche Zahl  $n$  eine Folge

$$j_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (\text{A.7})$$

welche eine Teilfolge des Vorgängers  $j_{n-1}(\nu)$  ist und zwar so, dass der jeweilige Grenzwert  $y_n$  existiert. Nun tritt das Diagonalverfahren in Kraft, d. h. wir wählen aus jeder Teilfolge ein Glied aus und bilden somit eine weitere Folge

$$k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ mit } k_\nu := j_\nu(\nu). \quad (\text{A.8})$$

Diese erfüllt letztendlich, dass der Grenzwert

$$y_N := \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{k_\nu}^{(N)} \quad (\text{A.9})$$

für alle natürliche Zahlen  $N$  existiert.  $\square$

**Lemma A.5** (Schwarzsche Integralformel). *Es sei  $f$  eine holomorphe Funktion in einer Umgebung der Kreisscheibe  $\overline{B_R(0)}$ . Dann gilt für alle  $z \in B_R(0)$ :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\operatorname{Re} f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\zeta + i \operatorname{Im} f(0). \quad (\text{A.10})$$

*Beweis.* Diese Formel folgt aus Manipulation der Cauchyschen Integralformel, siehe [RS02, Abschnitt 7.2.5].  $\square$

**Lemma A.6** (Mittelwertungleichung). *Es sei  $R > 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $f$  eine holomorphe Funktion in einer Umgebung der Kreisscheibe  $\overline{B_R(z_0)}$ . Dann gilt die Mittelwertungleichung*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \sup \left\{ |f'(\zeta)| \mid \zeta \in \overline{B_R(z_0)} \right\} \cdot |z - z_0| \quad (\text{A.11})$$

für alle  $z \in \overline{B_R(z_0)}$ .

*Beweis.* Siehe [Jaf92].  $\square$

**Satz A.7** (Fortsetzungssatz von Carathéodory). *Es sei  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$  ein Mengerring auf der Menge  $M$  und  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Prämaß auf  $\mathcal{A}$ . Dann existiert genau ein Maß  $\tilde{\mu}$  auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten Sigma-Algebra mit  $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ . Weiterhin ist  $\tilde{\mu}$  ebenfalls  $\sigma$ -endlich.*

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [Kle06, Satz 1.41] oder [Sch05, 6.1 Theorem].  $\square$

## Literatur

- [AB06] Charalambos D. Aliprantis und Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhikers Guide*. 3. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer, 2006.
- [AG93] Naum I. Achiezer und Izrail M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. New York: Dover Publications, 1993.
- [Bau85] Hellmut Baumgärtel. *Analytic perturbation theory for matrices and operators*. Basel [u.a.]: Birkhäuser, 1985.
- [Bit91] Sergio Bittanti. „Count Riccati and the early days of the Riccati equation“. In: *The Riccati Equation*. Berlin und Heidelberg: Springer, 1991, S. 1–10.
- [BS87] Michail S. Birman und Michail Z. Solomjak. *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its applications (Soviet series). Dordrecht [u.a.]: Reidel, 1987.
- [BSU96] Yurij M. Berezansky, Zinovij G. Sheftel und Georgij F. Us. *Functional analysis*. Bd. 1, 2. Operator Theory Advances and Applications Vol. 85, 86. Basel [u.a.]: Birkhäuser, 1996.
- [EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Boca Raton: CRC Press, 1992.
- [Els99] Jürgen Elstrodt. *Maß- Und Integrationstheorie*. 2. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer, 1999.
- [FT12] Neil Falkner und Gerald Teschl. „On the substitution rule for Lebesgue–Stieltjes integrals“. In: *Expositiones Mathematicae* 30.4 (2012), S. 412–418. DOI: 10.1016/j.exmath.2012.09.002.
- [GHK10] Karl-Heinz Goldhorn, Hans-Peter Heinz und Margarita Kraus. *Moderne mathematische Methoden der Physik: Operator- und Spektraltheorie - Gruppen und Darstellungen*. Bd. 2. Berlin und Heidelberg: Springer, 2010.
- [Gil89] Daphne J. Gilbert. „On subordinacy and analysis of the spectrum of Schrödinger operators with two singular endpoints“. In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 112.3-4 (1989), S. 213–229.
- [Gil98] Daphne J. Gilbert. „On subordinacy and spectral multiplicity for a class of singular differential operators“. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh-A-Mathematics*. Bd. 128. 3. Cambridge Univ Press. 1998, S. 549–584.
- [GP87] Daphne J. Gilbert und David B. Pearson. „On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators“. In: *Journal of mathematical analysis and applications* 128.1 (1987), S. 30–56.

- [Gre60] David Greenstein. „On the Analytic Continuation of Functions Which Map the Upper Half Plane into Itself“. In: *J. Math. Anal. Appl.* 218.1 (1960), S. 355–362.
- [GT00] Fritz Gesztesy und Eduard Tsekanovskii. „On matrix-valued Herglotz functions“. In: *Mathematische Nachrichten* 218.1 (2000), S. 61–138.
- [HJ85] Roger A. Horn und Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge und New York: Cambridge University Press, 1985.
- [Jaf92] F. Jafari. „A complex Rolle’s theorem“. In: *The American mathematical monthly* 99.9 (1992), S. 858–861.
- [Kat57] Tosio Kato. „On finite-dimensional perturbations of self-adjoint operators.“ In: *Journal of the Mathematical Society of Japan* 9.2 (1957), S. 239–249.
- [Kat66] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Berlin [u.a.]: Springer, 1966.
- [KFS75] Andreĭ N. Kolmogorov, Sergeĭ V. Fomin und Richard A. Silverman. *Introductory real analysis*. New York: Courier Dover Publications, 1975.
- [Kle06] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin [u.a.]: Springer, 2006.
- [KM05] Vadim Kostrykin und Konstantin A. Makarov. „The Singularly Continuous Spectrum and Non-Closed Invariant Subspaces“. In: *Recent Advances in Operator Theory and its Applications*. Hrsg. von Israel Gohberg, D. Alpay, J. Arazy u. a. Bd. 160. Operator Theory: Advances and Applications. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2005, S. 299–309. DOI: 10.1007/3-7643-7398-9\_14.
- [KMM03] Vadim Kostrykin, Konstantin A. Makarov und Alexander K. Motovilov. „Existence and uniqueness of solutions to the operator Riccati equation. A geometric approach“. In: *Contemporary Mathematics* 327 (2003). Hrsg. von Yulia Karpeshina, Rudi Weikard und Yanni Zeng, S. 181–198. DOI: 10.1090/conm/327/05814.
- [KMM07] Vadim Kostrykin, Konstantin A. Makarov und Alexander K. Motovilov. „Perturbation of spectra and spectral subspaces“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 359.1 (2007), S. 77–89.
- [LR95] Peter Lancaster und Leiba Rodman. *Algebraic riccati equations*. Oxford University Press, 1995.
- [Pea78] David B. Pearson. „Singular continuous measures in scattering theory“. In: *Communications in mathematical physics* 60.1 (1978), S. 13–36.
- [Pri56] Ivan I. Priwalow. *Randeigenschaften analytischer Funktionen*. 2. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.
- [RS02] Reinhold Remmert und Georg Schumacher. *Funktionentheorie*. 5. Aufl. Bd. 1. Berlin [u.a.]: Springer, 2002.
- [RS72] Michael Reed und Barry Simon. *I: Functional Analysis, Volume 1*. Bd. 1. Academic Press, 1972.

- [Rud09] Walter Rudin. *Reelle und komplexe Analysis*. 2. Aufl. München: Oldenbourg, 2009.
- [Rud70] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. International student edition. London [u.a.]: McGraw-Hill, 1970.
- [Sch05] René L. Schilling. *Measures, integrals and martingales*. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [Sch12] Konrad Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*. Dordrecht [u.a.]: Springer, 2012.
- [Sim10] Barry Simon. *Trace ideals and their applications*. Bd. 120. American Mathematical Soc., 2010.
- [Tes09] Gerald Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics: with applications to Schrödinger operators*. Providence, RI: American Math. Soc., 2009.
- [Tre08] Christiane Tretter. *Spectral theory of block operator matrices and applications*. London: Imperial College Press London, 2008.
- [Wei80] Joachim Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*. New York, Heidelberg und Berlin: Springer, 1980.
- [Wer05] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 5. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer, 2005.



## **Erklärung**

Ich versichere hiermit, diese Masterarbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Literatur verfasst zu haben.

Mainz, den 17. Juli 2013

---

Julian Großmann